শ্রীকেশবচন্দ্র নাগ

Recommended by the West Bengal Board of Secondary Education as a Text Book for Class VIII of all Schools of West Bengal.
[Vide Notification No. T.B./76/8/M/21 dated 3.1.77]

আধুনিক গণিত

[পাটীগণিত, বীজগণিত ও জ্যামিতি]

[অষ্টম শ্রেণীর জন্য]

অনুমোদিত নূতন সংস্করণ

(বস্তুভিত্তিক আদর্শ প্রশ্নসহ)

শ্রীকেশবচন্দ্র নাগ

অবসরপ্রাপ্ত প্রধান শিক্ষক, মিত্র ইন্‌স্টিট্যুশন্ (ভবানীপুর); গ্রন্থকার, আধুনিক গণিত (VII) ও নব পাটীগণিত (VI), মাধ্যমিক ঐচ্ছিক গণিত, জ্যামিতি ও পরিমিতি (IX), জ্যামিতি, পরিমিতি ও ত্রিকোণমিতি (X), পাটীগণিত ও বীজগণিত (IX) & (X), Arithmetic & Algebra (IX) & (X), Geometry & Mensuration (IX), Geometry, Mensuration & Trigonometry (X), Secondary Mathematics (Eng. & Beng. IX & X), Higher Secondary Mathematics (XI & XII—Paper I & II)etc.

ক্যালকাটা বুক হাউস

১/১, বঙ্কিম চ্যাটার্জি স্ট্রীট, কলিকাতা-৭০০০৭৩

প্রকাশক :
শ্রীপরেশচন্দ্র ভাওয়াল
১/১, বঙ্কিম চ্যাটার্জি স্ট্রীট্
কলিকাতা-৭০০০৭৩

প্রথম প্রকাশ : জানুয়ারী, ১৯৭৫
পরিমার্জিত সংস্করণ : সেপ্টেম্বর, ১৯৭৫
পুনর্মুদ্রণ : ফেব্রুয়ারী, ১৯৭৬
অনুমোদিত সংস্করণ : জানুয়ারী, ১৯৭৭
অনুমোদিত সংস্করণ : ফেব্রুয়ারী, ১৯৭৭

"Paper used for printing of this book was made available partly by the Govt. of India at a concessional rate."

মূল্য : ছয় টাকা পঁয়ত্রিশ পয়সা

মুদ্রাকর :—শ্রীনিরঞ্জন দাস, দাস প্রিণ্টার্স, ১৭, বুদ্ধ ওস্তাগর লেন, কলিকাতা-৭০০০০৯ ও শ্রীপবিত্রলাল দত্ত, প্রিণ্টোগ্রাফ, ১০১, বৈঠকখানা রোড, কলিকাতা-৭০০০০৯

ভূমিকা

পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ **অষ্টম শ্রেণীর** পাটীগণিত, বীজগণিত ও জ্যামিতির সম্পূর্ণ নূতন পাঠ্যক্রম প্রবর্তিত করিয়াছেন।

জ্যামিতির পাঠ্যক্রম কয়েকটি শ্রেণীতে কিছুটা New Mathematicsকে ভিত্তি করিয়া নির্ধারিত হইয়াছে। সেজন্য আমি সেই অনুসারে এই শ্রেণীতেও কয়েকটি উপপাদ্যের **বিকল্প প্রমাণ** দিয়াছি। এই প্রমাণ সপ্তম শ্রেণীতে পঠিত নূতন গণিতের **প্রতিফলন, চলন, আবর্তন** প্রভৃতি রূপান্তর বিষয়ের উপর প্রতিষ্ঠিত। ইহাতে পূর্ব শ্রেণীতে অধীত নূতন গণিতের বিষয়গুলির সহিত ছাত্রদের সহযোগ রক্ষিত হইবে ও পরবর্তী শ্রেণীতে নূতন পাঠ্যক্রম সহজবোধ্য হইবে বলিয়া মনে করি।

দীর্ঘ পঞ্চাশ বৎসর কাল শিক্ষকতায় ব্রতী থাকিয়া ও দীর্ঘদিন পর্ষদের গণিতের প্রধান পরীক্ষকরূপে নিযুক্ত থাকিয়া বহুবিধ শিক্ষার্থীর সংস্পর্শে আসিয়াছি এবং তাহাদের গণিতবিদ্যা আয়ত্ত করিতে কি অসুবিধা হয়, কিরূপে ইহা তাহাদের সহজবোধ্য করা যায় এবং তাহারা অঙ্কের সমাধানে কোথায় কিভাবে ভুল করে তাহা জানিবার সুযোগ পাইয়াছি। সেই মূল্যবান অভিজ্ঞতার আলোকই এই গ্রন্থ প্রণয়নে আমাকে পথ প্রদর্শন করিয়াছে। যে সকল প্রশ্নের সমাধানে শিক্ষার্থীদের প্রায়ই ভুল হয়, সেই সকল প্রশ্নের সমাধানকালে যথাস্থানে তাহাদের দৃষ্টি আকর্ষণ করিয়াছি ও নানা উদাহরণের সাহায্যে বিষয়বস্তু সহজবোধ্য করার চেষ্টা করিয়াছি।

পর্ষৎ কর্তৃক প্রকাশিত গণিত পুস্তক রচনার **নির্দেশক পুস্তকের** নির্দেশানুসারে দৈনন্দিন জীবনের নানা ক্ষেত্রে গণিতের যে ব্যবহারিক প্রয়োজন ও প্রয়োগ হয়, সে দিকে দৃষ্টি রাখিয়াই অঙ্কগুলিকে পুনর্বিন্যাস করা হইয়াছে এবং **সমগ্র পুস্তকটি নূতন পাঠ্যক্রম ও পর্ষদের এই Guide Book অনুসারে রচিত হইয়াছে।**

গণিত ইতিহাস ও প্রাচীন বিখ্যাত **গণিতজ্ঞদের** জীবনী ও অবদান পাঠে ছাত্রছাত্রীরা প্রেরণা লাভ করিবে, ভারতীয় কৃষ্টির প্রতি শ্রদ্ধাশীল ও গণিত অধ্যয়নে আকৃষ্ট হইবে মনে করিয়া পরিশিষ্টে এবিষয়ে সংক্ষিপ্ত বিবরণ সংযোজিত করা হইয়াছে।

বর্তমানে এই পুস্তকের **পরিমার্জিত সংস্করণ** প্রকাশ করা হইল। সময় স্বল্পতার জন্য লেখা ও প্রকাশনার কাজ ত্বরান্বিত করিতে হওয়ায় বইটিতে পূর্ব-সংস্করণে কিছু ত্রুটি ও উত্তরে কয়েকটি ভুল থাকিয়া যায়। এই সংস্করণে উহা সংশোধনের চেষ্টা করিয়াছি।

সম্প্রতি **পঃ বঃ শিক্ষা পর্ষৎ** কর্তৃক প্রকাশিত বস্তুভিত্তিক (objective) প্রশ্নের আদর্শে কিছু কিছু **উদাহরণ ও আদর্শ প্রশ্নপত্র** এই সংস্করণের পরিশিষ্টে সংযোজিত হইল। ছাত্রছাত্রীরা এই আদর্শ অনুসরণে প্রস্তুত হইলে উপকৃত হইবে।

আশা করি, সুধী শিক্ষকমণ্ডলী এই বৃদ্ধ অবসরপ্রাপ্ত শিক্ষকের পুস্তকগুলি পূর্বের ন্যায় সহানুভূতির সহিত গ্রহণ করিবেন। ইতি

1. 9. 75 } শ্রীকেশবচন্দ্র নাগ

পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ আমার এই পুস্তকটি পাঠ্যপুস্তকরূপে অনুমোদন করায় আমি অত্যন্ত আনন্দিত। বর্তমানে এই পুস্তকটির **অনুমোদিত-সংস্করণ** প্রকাশ করা হইল। আমার পুত্র শ্রীমান্ দেবীপ্রসাদের ঐকান্তিক প্রচেষ্টায় অতি সত্বর এই সংস্করণ প্রকাশ সম্ভব হইয়াছে।

20. 12. 76 } গ্রন্থকার

SYLLABUS

CLASS VIII

REVISED

ARITHMETIC (30 marks)

1. Revision of previous work.
2. Average—Application in simple problems based on experience of daily life of the pupils.
3. Extraction of square root of vulgar fractions and decimal fractions—Application in simple problems.
4. Application of unitary method in simple problems relating to time and distance ; income-tax.

[*Problems should be direct*]

ALGEBRA (40 marks)

1. Revision of previous work.
2. Multiplication and division of polynomials.
3. The following formulæ and their applications :

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$=a^3+b^3+3ab(a+b).$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$
$$=a^3-b^3-3ab(a-b).$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3.$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$$

4. Factors involving above formulæ.
5. Factors of a quadratic expression by breaking the middle term.
6. H.C.F. and L.C.M. of simple expressions by factorisation.
7. Simple problems involving simultaneous equations involving two unknowns.
8. Graphical representation of numerical data based on activities and experiences of daily life of the pupils ; Bar graphs.

GEOMETRY (30 marks)

[*The aim of teaching at this stage is to make the pupils familiar with logical deductive reasoning. Any form of logical reasoning is allowed. Properties obtained through activity may be taken as axioms*]

1. Activities verifying the following statements :
   (a) If a straight line stands on another straight line, the sum of the two angles so formed is equal to two right angles.
   (b) If the sum of two adjacent angles is equal to two right angles, the exterior arms are in the same line.
   (c) When a straight line cuts two other straight lines, those other two straight lines are parallel if a pair of corresponding angles are congruent.
   (d) Two intersecting straight lines cannot both be parallel to a third straight line.
   (e) Congruence of two triangles—SAS, AAS.
   (f) In congruent circles (or in the same circle) equal chords cut off equal arcs and subtend congruent angles at the centre and conversely.
2. To establish the following using the results obtained in (1).
   (a) If two straight lines intersect, the vertically opposite angles are congruent.
   (b) When a straight line cuts two other straight lines, those other two straight lines are parallel if, either
      (i) a pair of alternate angles are congruent

      Or,

      (ii) a pair of interior angles on the same side of the cutting line are together equal to two right angles.

(c) If a straight line cuts two parallel straight lines :

(i) Corresponding angles are congruent.

(ii) Alternate angles are congruent.

(iii) The interior angles on the same side of the cutting line are together equal to two right angles.

(d) The sum of the angles of a triangle is equal to two right angles.

(e) If one side of a triangle be produced, the exterior angle so formed is equal to the sum of two interior opposite angles.

(f) The sum of the interior angles of a polygon of 'n' sides is equal to $2(n-2)$ right angles.

(g) If two sides of a triangle are congruent, the angles opposite to them are also congruent and conversely.

(h) Congruence of two triangles—SSS. Congruence of two right-angled triangles.

(i) If two sides of a triangle are unequal, the angle opposite to the greater side is greater than the angle opposite to the less and conversely.

(j) Any two sides of a triangle are together greater than the third side.

(k) Of all line segments that can be drawn to a given straight line from a given point outside it, the perpendicular is the shortest.

3. Constructions :

(i) To draw a straight line through a given point parallel to a given straight line.

(ii) To divide a segment into any number of congruent segments.

সূচীপত্র

পাটীগণিত

বীজগণিত

পুরাতন এককাবলী

পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ কর্তৃক প্রকাশিত গণিতের নির্দেশক-পুস্তকে (Guide Book) বলা হইয়াছে যে, কেবল মেট্রিক এককাবলী পাঠ্যক্রমে দেওয়া হইয়াছে, কিন্তু পূর্বপ্রচলিত বিভিন্ন এককাবলীর সহিত পরিচিত না থাকিলে ছাত্রগণ দৈনন্দিন জীবনে অসুবিধার সম্মুখীন হইতে পারে। সেইজন্য উক্ত পুস্তকের নির্দেশানুযায়ী এই পুস্তকে কিছু অঙ্ক পুরাতন এককাবলীতে দেওয়া হইয়াছে। এইগুলি সমাধানের সুবিধার জন্য কয়েকটি এককাবলী নিম্নে দেওয়া হইল।

1. মুদ্রাবিভাগ

দেশীয়

4 পয়সা=1 আনা
4 আনা=1 সিকি
16 আনা বা 4 সিকি=1 টাকা
12 পাই=1 আনা
3 পাই=1 পয়সা

ইংলণ্ডীয়

4 ফার্দিং (q.)=1 পেনি (d.)
12 পেনি=1 শিলিং (s.)
20 শিলিং=1 পাউণ্ড বা সভারিণ (£)
5 শিলিং=1 ক্রাউন
21 শিলিং=1 গিনি
2 শিলিং=1 ফ্লোরিন

আমেরিকায় প্রচলিত

100 সেণ্ট=1 ডলার ($)

2. দেশীয় বাজার ওজন

5 তোলা বা 4 কাঁচ্চা=1 ছটাক
4 ছটাক=1 পোয়া
16 ছটাক বা 4 পোয়া=1 সের
40 সের=1 মণ

3. ইংলণ্ডীয় বাজার ওজন

16 ড্রাম (dram)=1 আউন্স (oz.)
16 আউন্স=1 পাউণ্ড (lb.)
28 পাউণ্ড=1 কোয়ার্টার (qr.)
4 কোয়ার্টার=1 হন্দর বা হাণ্ড্রেড্ ওয়েট (cwt.)
20 হন্দর=1 টন
1 পাউণ্ড (এভড়ুপয়েজ) =7000 গ্রেণ (ট্রয়)
1 ষ্টোন=14 পাউণ্ড
1 টন=27 মণ 9 সের (প্রায়)

4. আয়তন

2 পাঁইট (pint)=1 কোয়ার্ট (quart)
4 কোয়ার্ট =1 গ্যালন (gallon)
36 গ্যালন =1 ব্যারেল (barrel)
1 গ্যালন জলের ওজন=10 পাউণ্ড

5. ইংলণ্ডীয় রৈখিক মাপ

12 ইঞ্চি (ই.)=1 ফুট (ফু.)	40 পোল বা 220 গজ=1 ফার্লং
3 ফুট=1 গজ (গ.)	8 ফার্লং=1 মাইল
1760 গজ=1 মাইল (মা.)	3 মাইল=1 লীগ
$5\frac{1}{2}$ গজ=1 পোল	22 গজ=1 চেন

দ্রষ্টব্য : 1 গজ আমাদের দেশের 2 হাতের সমান মাপ।

6. ভূমির মাপ

দেশীয়	ইংলণ্ডীয়
4 হাত বা 16 ছটাক=1 কাঠা	100 লিঙ্ক=1 চেন
20 কাঠা=1 বিঘা	10 চেন=1 ফার্লং

7. কাগজের সংখ্যার হিসাব

24 তা=1 দিস্তা   20 দিস্তা=1 রিম

8. দ্রব্যের গণনা

ইংলণ্ডীয়

12 টা=1 ডজন	12 গ্রোস=1 গ্রেট্ গ্রোস
12 ডজন=1 গ্রোস	20 টা=1 স্কোর

9. সময় বা কাল পরিমাণ

ইংলণ্ডীয়		দেশীয়
60 সেকেণ্ডে (সে.)	...1 মিনিট (মি.)	60 অনুপল=1 বিপল
60 মিনিটে	...1 ঘণ্টা (ঘ.)	60 বিপল =1 পল
24 ঘণ্টায়	...1 দিন (দি.)	60 পল =1 দণ্ড
7 দিনে	...1 সপ্তাহ (স.)	60 দণ্ড =1 দিন
30 দিনে	...1 মাস (মা.)	30 দিন =1 মাস
12 মাসে	...1 বৎসর (ব.)	12 মাস =1 বৎসর
365 দিনে	...1 বৎসর	7 দিন =1 সপ্তাহ
52 সপ্তাহে	...1 বৎসর	$7\frac{1}{2}$ দণ্ড =1 প্রহর
100 বৎসরে	...1 শতাব্দী	8 প্রহর=1 দিন ; 15 দিন=1 পক্ষ।

পাটীগণিত

[ARITHMETIC]

অষ্টম শ্রেণী

এই পাটীগণিতে ব্যবহৃত বিভিন্ন প্রক্রিয়ার চিহ্ন ও তাহাদের অর্থ

$+$ চিহ্ন : যোগ চিহ্ন (যথা $3+2=5$)

$-$ চিহ্ন : বিয়োগ চিহ্ন (যথা $3-2=1$)

$\times$ চিহ্ন : গুণ চিহ্ন (যথা $3\times2=6$)

$\div$ চিহ্ন : ভাগ চিহ্ন (যথা $10\div5=2$)

$=$ চিহ্ন : সমান চিহ্ন (যথা $4+3=7$)

$\surd$ চিহ্ন : বর্গমূলের চিহ্ন (যথা $\sqrt{16}$ অর্থাৎ 16-র বর্গমূল)

$\sqrt[3]{}$ চিহ্ন : ঘনমূলের চিহ্ন (যথা $\sqrt[3]{27}=3$)

% চিহ্ন : শতকরা চিহ্ন (যথা 5% অর্থাৎ শতকরা 5)

$<$ চিহ্ন : এই চিহ্ন দ্বারা ক্ষুদ্রতর বুঝায় (যথা $5<6$)

$>$ চিহ্ন : এই চিহ্নে বৃহত্তর বুঝায় (যথা $7>4$)

$\equiv$ চিহ্ন : এই চিহ্নে বুঝায় সর্বতোভাবে সমান

— চিহ্ন : ইহাকে রেখাবন্ধনী বলে (যথা $\overline{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$)

( ) চিহ্ন : ইহাকে লঘুবন্ধনী বলে

{ } চিহ্ন : ইহাকে ধনুর্বন্ধনী বলে

[ ] চিহ্ন : ইহাকে গুরুবন্ধনী বলে।

[এই চারিপ্রকার বন্ধনী ব্যবহৃত হয়]

$\odot$ চিহ্ন : ইহা একপ্রকার গুণ চিহ্ন (যথা 5.3 অর্থাৎ 5×3)।

9703

পাটীগণিত

প্রথম অধ্যায়

[পূর্বপাঠের পুনরালোচনা]

§ 1. **গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. সম্বন্ধীয় বিবিধ সমাধান।**

[সমাধানে গ. সা. গু. বা ল. সা. গু. কষিয়া দেখাইবে।]

উদাহরণ 1. কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা দ্বারা 82, 104, 148-কে ভাগ করিলে প্রত্যেকবার একই ভাগশেষ থাকে ?

82 = নির্ণেয় সংখ্যাটির কোন গুণিতক + ঐ ভাগশেষ,

104 = „ „ অপর কোন গুণিতক + ঐ ভাগশেষ,

এবং 148 = „ „ অন্য কোন গুণিতক + ঐ ভাগশেষ,

অতএব, দেখা যাইতেছে যে 82, 104 ও 148-এর যে কোন দুইটির অন্তর ঐ নির্ণেয় সংখ্যাটির কোন গুণিতক, সুতরাং উহার দ্বারা সম্পূর্ণ বিভাজ্য।

$104-82=22,\ 148-104=44,\ 148-82=66$;

এই 22, 44 ও 66 নির্ণেয় সংখ্যাটির দ্বারা বিভাজ্য।

∴ নির্ণেয় বৃহত্তম সংখ্যা = 22, 44 ও 66-এর গ. সা. গু. = 22.

উদাহরণ 2. কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে 24, 30 ও 36 দ্বারা ভাগ করিলে যথাক্রমে 21, 27 ও 33 ভাগশেষ থাকে ?

$24-21=3,\ \ 30-27=3,\ \ 36-33=3$; এখানে দেখা যাইতেছে যে, প্রত্যেক ভাগশেষ ভাজক অপেক্ষা 3 কম। অতএব, বুঝা যাইতেছে যে, নির্ণেয় সংখ্যাটি 24, 30 ও 36 দ্বারা বিভাজ্য ক্ষুদ্রতম সংখ্যা অপেক্ষা 3 কম।

24, 30 ও 36 দ্বারা বিভাজ্য ক্ষুদ্রতম সংখ্যা = 24, 30 ও 36-এর ল. সা. গু. = 360 [এখানে ল. সা. গু. করিয়া দেখাইবে।]

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা = 360 − 3 = 357.

উদাহরণ 3. 252টি লেবু ও 360টি লিচু কতকগুলি বালককে সমান ভাগ করিয়া দেওয়া হইল। বালক-সংখ্যা কত? যতগুলি সম্ভব উত্তর দাও।

যখন 252টি লেবু ও 360টি লিচু সমান সমান পরিমাণে ভাগ করিয়া দেওয়া যায়, তখন বালকদিগের সংখ্যার দ্বারা উভয় সংখ্যাই বিভাজ্য হওয়া চাই।

অতএব, 252 ও 360-এর সাধারণ গুণনীয়কগুলি উত্তর হইবে।

$$\begin{array}{r|r} 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

252 ও 360-এর গ. সা. গু. = 36.

$\therefore$ নির্ণেয় বালক-সংখ্যা = 36 এবং 36-এর যে কোন উৎপাদক = 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

উদাহরণ 4. 500 ও 1000-এর মধ্যবর্তী কোন্ কোন্ সংখ্যা-গুচ্ছের গ. সা. গু. 163 হইতে পারে?

$$163 \overline{)\,500\,}(3$$
$$\underline{489}$$
$$11$$

এখানে বুঝা যাইতেছে যে, 500 ও 1000-এর মধ্যবর্তী 163-র গুণিতকগুলি প্রথমে নির্ণয় করিতে হইবে। 163-র 3 গুণ 500 অপেক্ষা কম। অতএব, $163 \times 4 = 652$, $163 \times 5 = 815$, $163 \times 6 = 978$, এই সংখ্যাগুলির সাধারণ গুণনীয়ক 163 ; 163×7, 1000 অপেক্ষা বড় বলিয়া উহা ধরিতে হইবে না। এখন 652, 815 ও 978 এই সংখ্যা তিনটির কোন্ কোন্‌গুলির গ. সা. গু. 163 তাহা স্থির করিতে হইবে। এই সংখ্যা তিনটির মধ্যে 652 ও 815, 815 ও 978, অথবা 652, 815 ও 978 এই তিন দলের গ. সা. গু. 163

হইতে পারে। এখানে 652 ও 978 এই দলটি ধরা হইল না কেন? কারণ, ঐ সংখ্যা দুইটির 163 ব্যতীত 2 আর একটি সাধারণ গুণনীয়ক আছে বলিয়া উহাদের গ. সা. গু. হইবে 163×2 অর্থাৎ 326.

উদাহরণ 5. দুইটি সংখ্যার গ. সা. গু. 17 এবং উহাদের যোগফল 136 হইলে, সংখ্যা দুইটি কি কি হইতে পারে?

সংখ্যা দুইটির গ. সা. গু. 17 বলিয়া উহারা 17 দ্বারা বিভাজ্য; সুতরাং উহাদের যোগফলও 17 দ্বারা বিভাজ্য; $136 \div 17 = 8$. অতএব, বুঝিতে হইবে যে, সংখ্যা দুইটিকে পৃথক্‌ভাবে 17 দ্বারা ভাগ করিলে যে দুইটি ভাগফল হয় তাহাদের সমষ্টি 8. এখন দেখ, কোন্ কোন্ দুইটি সংখ্যার যোগফল 8.

$$\left.\begin{array}{l} 8 = 1 + 7 \\ 8 = 2 + 6 \\ 8 = 3 + 5 \\ 8 = 4 + 4 \end{array}\right\}$$

এই জোড়াগুলির মধ্যে যে জোড়াগুলির সংখ্যাদ্বয় পরস্পর মৌলিক, কেবল সেইগুলিই লইতে হইবে। ইহাদের মধ্যে 1 ও 7 এবং 3 ও 5 পরস্পর মৌলিক। সুতরাং দুই জোড়া সংখ্যা হইবে।

∴ এক জোড়া সংখ্যা $= 17 \times 1$ ও $17 \times 7 = 17$ ও 119;
আর এক জোড়া সংখ্যা $= 17 \times 3$ ও $17 \times 5 = 51$ ও 85.

উদাহরণ 6. দুইটি সংখ্যার গ. সা. গু. 18 এবং ল. সা. গু. 108 হইলে, সংখ্যা দুইটি কি কি হইতে পারে?

এখানে গ. সা. গু. যখন 18 তখন সংখ্যা দুইটিকে 18 দিয়া ভাগ করিলে যে দুইটি ভাগফল পাওয়া যাইবে তাহারা অবশ্য পরস্পর মৌলিক হইবে, নতুবা গ. সা. গু. 18 না হইয়া অন্য হইত। আর আমরা জানি যে, গ. সা. গু.-কে ঐ ভাগফল দুইটি দিয়া ক্রমিক গুণ করিলে ল. সা. গু. পাওয়া যায়।

এখানে $108 \div 18 = 6$. এখন এই 6-কে পরস্পর মৌলিক উৎপাদকে বিভক্ত করিতে হইবে। $6 = 1 \times 6, 6 = 2 \times 3$; 1 ও 6 এবং 2 ও 3 পরস্পর মৌলিক, সুতরাং নির্ণেয় সংখ্যা দুই জোড়া হইবে।

∴ এক জোড়া সংখ্যা $= 18 \times 1$ ও $18 \times 6 = 18$ ও 108 ;
আর এক জোড়া সংখ্যা $= 18 \times 2$ ও $18 \times 3 = 36$ ও 54. } উত্তর

উদাহরণ 7. দুইটি সংখ্যার গুণফল 12960 এবং উহাদের গ. সা. গু. 36. এইরূপ কয় জোড়া সংখ্যা হইতে পারে। সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর। [ক. প্র. 1946]

∵ দুইটি সংখ্যার গ. সা. গু. × ল. সা. গু. = সংখ্যা দুইটির গুণফল,

∴ $36 \times$ ল. সা. গু. $= 12960$,

∴ ল. সা. গু. $= 12960 \div 36 = 360$.

[এখন উদাহরণ 6-এর সমাধানের মত কর]

$360 \div 36 = 10, 10 = 1 \times 10, 10 = 2 \times 5$; 1 ও 10 এবং 2 ও 5 পরস্পর মৌলিক ; সুতরাং দুই জোড়া সংখ্যা হইতে পারে।

∴ এক জোড়া সংখ্যা $= 36 \times 1$ ও $36 \times 10 = 36$ ও 360 ;
অন্য জোড়া সংখ্যা $= 36 \times 2$ ও $36 \times 5 = 72$ ও 180. }

উদাহরণ 8. কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে 6, 8 ও 10 দিয়া ভাগ করিলে 1 ভাগশেষ থাকে, কিন্তু 13 দিয়া ভাগ করিলে কোন ভাগশেষ থাকে না ?

এখানে 6, 8 ও 10-এর ল. সা. গু. = 120 [ল. সা. গু. করিয়া দেখাইবে]। সুতরাং 120 ও তাহার যে-কোন গুণিতক 6, 8, 10 দ্বারা বিভাজ্য। অতএব বুঝা যাইতেছে যে, নির্ণেয় সংখ্যাটি 120-র কোন গুণিতক অপেক্ষা 1 বেশী। এখন 120-র কত গুণের সহিত 1 যোগ

করিলে যোগফলটি 13 দ্বারা বিভাজ্য হয়, তাহা নির্ণয় করিতে হইবে।

$$13\,)\,120\,(\,9$$
$$\underline{117}$$
$$3$$

ইহার জন্য 120কে 13 দিয়া ভাগ করিলে কত ভাগশেষ হয় দেখ। ভাগশেষ হইয়াছে 3. এইবার দেখ 3-এর কত গুণের সহিত 1 যোগ করিলে 13 দ্বারা বিভাজ্য হয়। দেখা যাইতেছে যে, $3 \times 4 + 1 = 13$, ইহা 13 দ্বারা বিভাজ্য। $\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= 120 \times 4 + 1 = 481$.

উদাহরণ 9. পাঁচ অঙ্কের কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা 8509-এর সহিত যোগ করিলে যোগফলটি 20, 27, 32 ও 36 দ্বারা বিভাজ্য হইবে?

[ঢা. বো. 1935]

পাঁচ অঙ্কের বৃহত্তম সংখ্যা = 99999.

20, 27, 32 ও 36এর ল. সা. গু. দ্বারা যে সংখ্যা বিভাজ্য তাহা এই সংখ্যাগুলির দ্বারাও বিভাজ্য।

```
2 | 20, 27, 32, 36
2 | 10, 27, 16, 18
3 |  5, 27,  8,  9
3 |  5,  9,  8,  3
     5,  3,  8,  1
```

20, 27, 32 ও 36-এর ল. সা. গু. $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 3 \times 8 = 4320$.

```
          99999
         +8509
4320 ) 108508 ( 25
         8640
         22108
         21600
           508
```

এখানে 8509এর সহিত 5 অঙ্কের বৃহত্তম সংখ্যা 99999 যোগ করিয়া দেখা গেল যে, যোগফলটি 4320 দ্বারা বিভাজ্য হয়

নাই। 508 অতিরিক্ত হইয়াছে, সুতরাং 508 কম যোগ করিতে হইবে।

$\therefore$ $99999 - 508 = 99491$ নির্ণেয় সংখ্যা হইল।

উদাহরণ 10. 30516কে কোন সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিয়া 17, 27 ও 36 যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় বা শেষ ভাগশেষ পাওয়া গেল। ভাজকটি কত?

এখানে 3 বার ভাগশেষ থাকায় বুঝা যাইতেছে যে ভাগফলে 3টি অঙ্ক আছে। অতএব, ভাজ্যের 305 লইয়া প্রথম ভাগ-কার্য আরম্ভ

```
)305,16(
  ***
 ------
  17(1)
  ** *
 ------
   27(6)
  ** *
 ------
   36
```

হইয়াছে এবং 17 ভাগশেষ আছে, সুতরাং (305 – 17) বা 288 নির্ণেয় ভাজকটির গুণিতক অর্থাৎ ভাজকটি দ্বারা অবশ্যই বিভাজ্য। এইবার ভাগশেষ 17-এর গায়ে ভাজ্যের 1 নামাইয়া হইল 171 এবং তখন ভাগশেষ 27 থাকায় (171 – 27) বা 144 ভাজকটি দ্বারা বিভাজ্য। অনুরূপে (276 – 36) বা 240 ঐ ভাজক দ্বারা বিভাজ্য।

এক্ষণে, 288, 144 ও 240-এর প্রত্যেকটি নির্ণেয় ভাজক দ্বারা বিভাজ্য, সুতরাং উহাদের গ. সা. গু. কিংবা তাহার কোন গুণনীয়ক নির্ণেয় ভাজক হইবে।

```
144 ) 288 ( 2          1 | 144 | 240 | 1
      288                |  96 | 144 |
      ---                |  48 |  96 | 2
                         |     |  96 |
```

এখানে গ. সা. গু. = 48

$\therefore$ নির্ণেয় ভাজক = 48.

[দ্রষ্টব্য : 48এর যে কোন উৎপাদকের দ্বারাও 288, 144 ও 240 বিভাজ্য, সুতরাং 48 এবং উহার যে কোন উৎপাদক ভাজক

হইতে পারিত ; কিন্তু এই উৎপাদক প্রদত্ত ভাগশেষগুলির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়া আবশ্যক ; অতএব, এক্ষেত্রে 48 একমাত্র নির্ণেয় ভাজক।]

উদাহরণ 11. দুইটি সংখ্যার গ. সা. গু. নির্ণয় করিয়া 21 শেষ ভাজক এবং 1, 2 ও 3 পর পর 3টি ভাগফল পাওয়া গেল। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

[এই প্রকারের অঙ্ক শেষের দিক হইতে করিতে হয়।]

শেষ ভাজকটি হইল গ. সা. গু.

এখানে শেষ ভাজক 21 এবং শেষ ভাগফল 3 হওয়ায়, শেষ ভাজ্যটি (C) হইল (21×3) বা 63 ; সুতরাং এই 63 হইবে দ্বিতীয় (অর্থাৎ শেষ ভাজকের পূর্ববর্তী) ভাজক এবং তখন ভাগফল হইয়াছে 2 এবং ভাগশেষ আছে 21. অতএব, দ্বিতীয় ভাজ্য (A) হইল $(63\times2+21)$ বা 147. এই 147 হইবে প্রথম ভাজক (অর্থাৎ একটি নির্ণেয় সংখ্যা) এবং তখন ভাগফল 1 ও ভাগশেষ ঐ 63 (যাহা দ্বিতীয় ভাজক)। সুতরাং প্রথম ভাজ্য (B) ছিল $(147\times1+63)$ বা 210, ইহাই অপর নির্ণেয় সংখ্যা।

```
 A) B (1
    ....
 C) A (2
    ...
21) C (3
    ...
     ×
```

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় = 147 ও 210.

উদাহরণ 12. তিন অঙ্ক-বিশিষ্ট কোন্ সংখ্যা দ্বারা 7326 ও 9145কে ভাগ করিলে প্রত্যেক স্থলে একই ভাগশেষ থাকিবে ?

উভয়স্থলে যখন একই ভাগশেষ থাকে, তখন উহাদের বিয়োগফল অর্থাৎ $(9145-7326)$ বা 1819 নির্ণেয় সংখ্যা দ্বারা অবশ্য বিভাজ্য।

এখন $1819=17\times107$; 1819এর দুইটি উৎপাদক এবং

কেবল ঐ উৎপাদক দুইটি দ্বারা 1819 বিভাজ্য। ঐ উৎপাদক দুইটির মধ্যে কেবল 107টি তিন অঙ্ক-বিশিষ্ট।

∴ নির্ণেয় সংখ্যা = 107.

উদাহরণ 13. চারি অঙ্কের কোন্ বৃহত্তম সংখ্যাকে **12, 15** ও **18** দ্বারা ভাগ করিলে যথাক্রমে **9, 12** ও **15** ভাগশেষ থাকে ?

$12-9=3$, $15-12=3$, $18-15=3$. ভাগশেষগুলি ভাজকগুলি অপেক্ষা প্রতি ক্ষেত্রে 3 কম ; সুতরাং নির্ণেয় সংখ্যাটি 12, 15 ও 18 দ্বারা বিভাজ্য 4 অঙ্কের বৃহত্তম সংখ্যা অপেক্ষা 3 কম হইবে।

$$\begin{array}{r|l} 2 & 12,\ 15,\ 18 \\ \hline 3 & 6,\ 15,\ 9 \\ \hline & 2,\ 5,\ 3 \end{array}$$

12, 15 ও 18-এর ল.সা.গু. $= 2 \times 3 \times 2 \times 5 \times 3 = 180$

$$180\big)\ 9999\ \big(\ 55$$
$$\begin{array}{r} 900 \\ \hline 999 \\ 900 \\ \hline 99 \end{array}$$

$9999 - 99 = 9900$, ইহা বিভাজ্য সংখ্যা,

∴ নির্ণেয় সংখ্যা $= 9900 - 3 = 9897$.

উদাহরণ 14. এক ব্যক্তি 8 টাকা 16 পয়সা দিয়া কতকগুলি আম কিনিয়া তাহা হইতে 6 টাকা 42 পয়সা মূল্যে কতকগুলি আম বিক্রয় করিল। ইহাতে যদি তাহার লাভ বা ক্ষতি না হইয়া থাকে, তাহা হইলে ন্যূনপক্ষে এখনও তাহার কাছে কয়টি আম আছে ?

এখানে দেখা যাইতেছে যে 8টা. 16 প. কতকগুলি পূর্ণসংখ্যক আমের ক্রয়মূল্য এবং 6টা. 42 পয়সাও কতকগুলি পূর্ণসংখ্যক আমের

ক্রয়মূল্য। অতএব, এক একটি আমের মূল্য দ্বারা উভয় রাশিই বিভাজ্য।

∴ 8 টাকা 16 পয়সা ও 6 টাকা 42 পয়সার গ. সা. গু. একটি আমের উর্ধ্বতম মূল্য হইতে পারে এবং এই মূল্য হিসাবে যতগুলি আম অবশিষ্ট থাকিতে পারে, তাহাই ন্যূনপক্ষে অবশিষ্ট আমের সংখ্যা হইবে।

8 টাকা 16 পয়সা = 816 প. ; 6 টাকা 42 প. = 642 পয়সা। 816 পয়সা ও 642 পয়সার গ. সা. গু. = 6 পয়সা, ইহাই প্রত্যেক আমের উর্ধ্বতম মূল্য।

লোকটির কাছে এখনও (816 প. − 642 প.) বা 174 পয়সা মূল্যের আম আছে।

∴ তাহার কাছে ন্যূনপক্ষে এখনও (174 ÷ 6) বা 29টি আম আছে।

উদাহরণ 15. এক ব্যক্তি দৈনিক মজুরীতে মোট 29 টাকা 25 পয়সার চুক্তিতে কিছুদিনের জন্য নিযুক্ত হইল, কিন্তু কয়েকদিন অনুপস্থিত থাকায় সে মোট 22 টাকা 50 পয়সা পাইল। প্রমাণ কর যে, তাহার দৈনিক মজুরী 2 টাকা 25 পয়সার অধিক হইতে পারে না।

22 টা. 50 প. ও 29 টা. 25 প. লোকটির কতকগুলি পূর্ণসংখ্যক দিনের মজুরী বলিয়া একদিনের মজুরী দ্বারা উভয় রাশিই বিভাজ্য হইবে।

∴ 22 টা. 50 প. ও 29 টা. 25 পয়সার গ. সা. গু. তাহার উর্ধ্বতম দৈনিক মজুরী হইবে। 22 টা. 50 প. = 2250 প., 29 টা. 25 প. = 2925 পয়সা। 2250 পয়সা ও 2925 পয়সার গ. সা. গু. = 225 প.। অতএব, লোকটির দৈনিক মজুরী 225 পয়সা বা 2 টাকা 25 পয়সার অধিক হইতে পারে না।

প্রশ্নমালা 1

(পূর্বপাঠ সম্বন্ধীয় বিবিধ প্রশ্ন)

গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. সংক্রান্ত :

1. কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা দ্বারা 76, 62 ও 41-কে ভাগ করিলে প্রত্যেক বার একই ভাগশেষ থাকিবে ?
2. 573, 1364 ও 912-কে কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে একই ভাগশেষ থাকে ?
3. 300 ও 500-এর মধ্যবর্তী কোন্ কোন্ সংখ্যাগুচ্ছের গ. সা. গু. 63 হইতে পারে ?
4. সমান দরে 3 শি. 6 পে. ও 4 শি. 8 পে. দিয়া কয়েকটি কলম কেনা হইল। প্রত্যেকটি কলমের মূল্য অধিকপক্ষে কত হইতে পারে ?
5. কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে 48, 64, 72, 80, 120 ও 140 দিয়া ভাগ করিলে যথাক্রমে 38, 54, 62, 70, 110 ও 130 ভাগশেষ থাকে ? [ক. প্র. 1898]
6. 23759143 হইতে কোন্ ক্ষুদ্রতম ও কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা বিয়োগ করিলে অন্তরফলগুলি 24, 35, 91, 130 ও 150 দ্বারা বিভাজ্য হইবে ? [ক. প্র. 1896, 1941]
7. কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে 80, 96, 108 ও 128 দ্বারা ভাগ করিলে যথাক্রমে 73, 89, 101 ও 121 ভাগশেষ থাকিবে ?
8. 462টি আম ও 546টি সন্দেশ কতকগুলি বালককে সমানভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল। বালকদিগের সংখ্যা কত ? যতগুলি সম্ভব উত্তর দাও।
9. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 1212 এবং উহাদের গ. সা. গু. 101 ; ঐরূপ কয় জোড়া সংখ্যা হইতে পারে ? সেই জোড়াগুলি নির্ণয় কর। [ক. প্র. 1945]
10. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 873 এবং উহাদের গ. সা. গু. 97 হইলে সংখ্যা দুইটি কি কি হইতে পারে ?
11. দুইটি সংখ্যার ল. সা. গু. 2376 ও গ. সা. গু. 132 ; সংখ্যা দুইটি কি কি হইতে পারে ?

12. এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের গ. সা. গু. 31 ও ল. সা. গু. 372 হইবে। যতগুলি সম্ভব উত্তর দাও।
13. দুইটি সংখ্যার গুণফল 7168 এবং গ. সা. গু. 16 হইলে সংখ্যা দুইটি কি কি হইতে পারে?
14. দুইটি সংখ্যার গুণফল 12960 এবং উহাদের গ. সা. গু. 36; সংখ্যা দুইটি কি কি? যতগুলি সম্ভব উত্তর লিখ।
15. এমন একটি ক্ষুদ্রতম সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাকে 11 দিয়া ভাগ করিলে কোন ভাগশেষ থাকে না; কিন্তু 5, 6 ও 8 দিয়া ভাগ করিলে প্রত্যেকবারে ভাগশেষ 1 থাকে। [ছাত্র 1895]
16. কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে 12, 18 ও 21 দিয়া ভাগ করিলে 4 ভাগশেষ থাকে, কিন্তু 22 দিয়া ভাগ করিলে কোন ভাগশেষ থাকে না?
17. কতকগুলি মার্বেল গণনা করার সময় দেখা গেল একসঙ্গে 3টি করিয়া গণনা করিলে 1টি বাকি থাকিয়া যায়, একসঙ্গে 4টি করিয়া গণনা করিলে 2টি বাকি থাকে, 5টি করিয়া গুণিলে 3টি এবং 6টি করিয়া গুণিলে 4টি বাকি থাকিয়া যায়; ন্যূনপক্ষে মার্বেলের সংখ্যা কত?
18. 91509টি আম ও 83721টি লেবু কতিপয় বালক-বালিকাকে সমান ভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল। বালক-বালিকার সংখ্যা কত? যতগুলি সম্ভব উত্তর দাও। [ঢা. বো. 1930]
19. 11 দ্বারা বিভাজ্য কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে 7, 9, 14, 21 ও 35 দ্বারা ভাগ করিলে প্রত্যেক বার 2 ভাগশেষ থাকে? [ক. প্র. 1942]
20. 5 অঙ্কের কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা 8321-এর সহিত যোগ করিলে যোগফল 15, 20, 24, 27, 32 ও 36 দ্বারা বিভাজ্য হইবে? [ক. প্র. 1906]
21. 6 অঙ্কের কোন্ লঘিষ্ঠ সংখ্যাকে 12, 15 ও 18 দ্বারা ভাগ করিলে যথাক্রমে 9, 12 ও 15 ভাগশেষ থাকে?
22. 53790823 হইতে কোন্ বৃহত্তম ও কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা বিয়োগ করিলে অন্তরফল 24, 35, 63, 91 ও 520 দ্বারা বিভাজ্য হইবে? [ঢা. বো. 1935]
23. কোন ভাগে ভাজ্য 305165 এবং পর পর ভাগশেষগুলি 17, 27, 36 ও 29; ভাজকটি কত?

24. 64329কে কোন্ সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিয়া 175, 114 ও 213 যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় বা শেষ ভাগশেষ থাকিল। ভাগফলটি নির্ণয় কর। [ক. প্র. 1939]

25. দুইটি সংখ্যার গ. সা. গু. নির্ণয় করিয়া শেষ ভাজক 49 এবং পর পর ভাগফলগুলি যথাক্রমে 17, 3 ও 2 হইল। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর। [সি. সা.]

26. এক ব্যক্তি 10 টাকা 80 পয়সায় কতকগুলি আম কিনিয়া 8 টাকা 19 পয়সায় উহা হইতে কতকগুলি আম বিক্রয় করিল। ইহাতে যদি তাহার লাভ বা লোকসান না হইয়া থাকে, তবে তাহার নিকট কমপক্ষে আর কয়টি আম থাকিতে পারে?

27. এক ব্যক্তি দৈনিক মজুরীতে কয়েকদিন কাজ করিবার জন্য মোট 19 টাকা 80 পয়সার চুক্তিতে নিযুক্ত হইল, কিন্তু সে কিছুদিন অনুপস্থিত থাকায় মোট 17 টাকা 16 পয়সা পাইল। প্রমাণ কর যে, তাহার দৈনিক মজুরী 1 টাকা 32 পয়সার অধিক হইতে পারে না।

28. 90 পয়সায় এবং 1 টাকা 17 পয়সায় অখণ্ড কয়েক কিলোগ্রাম করিয়া লবণ পাওয়া যায়। প্রতি কি. গ্রাম লবণের মূল্য যদি 4 পয়সা ও 5 পয়সার মধ্যে হয়, তবে 1 কি. গ্রাম লবণের মূল্য কত?

29. একই দরে এক ব্যক্তি 19 টাকা 80 প. ও 34 টাকা 65 প. মূল্যে কতকগুলি করিয়া আম কিনিল, প্রত্যেক আমের মূল্য 24 পয়সার কম নহে এবং 36 পয়সার বেশী নহে। সে দুই দফায় মোট কতগুলি আম কিনিয়াছিল?

30. 2 টা. 50 পয়সা, 3 টা. 50 পয়সা ও 4 টাকা 50 পয়সা যথাক্রমে কতকগুলি পুরুষ, স্ত্রীলোক ও বালককে ভাগ করিয়া দেওয়ায় প্রত্যেকের ভাগ সমান হইল। লোকসংখ্যা যতদূর সম্ভব কম হইলে মোট কত লোক ছিল?

31. তিন অঙ্ক-বিশিষ্ট কোন্ সংখ্যা দ্বারা 7653 ও 11282কে ভাগ করিলে একই ভাগশেষ থাকিবে?

32. 13 দ্বারা বিভাজ্য কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে 5, 6 বা 8 দ্বারা ভাগ করিলে 1 ভাগশেষ থাকিবে?

ভগ্নাংশ

(পুনরনুশীলন)

§ **2.** ভগ্নাংশের সরলতা সম্পাদন সম্বন্ধে বিবিধ সমাধান পূর্ব শ্রেণীতে শিখান হইয়াছে। নিম্নে একটি সমাধান দেখান হইল। এইরূপ অঙ্ক সরল করিতে ছাত্রদের প্রায়ই ভুল হয়।

উদাহরণ 1. সরল কর :—

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+\frac{1}{3}}}+\frac{2}{3} \text{ এর } \frac{5}{6}\div\frac{5}{9}\left(\frac{3}{11}+\frac{5}{22}\right)\times\frac{8 \text{ লি. } 8 \text{ ডেসি লি.}}{13 \text{ লি. } 2 \text{ ডেসি লি.}} \text{ ।}$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{1}{1-\dfrac{1}{\frac{4}{3}}}+\frac{2}{3} \text{ এর } \frac{5}{6}\div\frac{5}{9}\left(\frac{6+5}{22}\right)\times\frac{\overset{2}{\cancel{88}} \text{ ডেসি লি.}}{\underset{3}{\cancel{132}} \text{ ডেসি লি.}}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{3}{4}}+\frac{2}{3} \text{ এর } \frac{5}{6}\div\frac{5\times1}{9\times2}\times\frac{2}{3}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{4}}+\frac{2}{\cancel{3}} \text{ এর } \frac{\cancel{5}}{\underset{3}{\cancel{6}}}\times\frac{\overset{3}{\cancel{9}}\times2}{\cancel{5}}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}=\frac{1\times4}{1}+\frac{4}{3}=4+\frac{4}{3}=5\frac{1}{3}.$$

[**দ্রষ্টব্য :** অঙ্কে '÷' চিহ্নের পর $\frac{5}{9}(\frac{3}{11}+\frac{5}{22})$কে একটি অংশ ধরিতে হইবে, সুতরাং ঐ অংশটি আগে সরল করিয়া যাহা হয় ভাগ-চিহ্নের পর তাহা লিখিবে। এখানে বন্ধনীর মধ্যের অংশ সরল করিয়া $\frac{1}{2}$ হইল ; যদি $\frac{5}{9}\times\frac{1}{2}$ লিখিতাম তবে লেখা সম্পূর্ণ ভুল হইত। কারণ, ঐরূপ লিখিলে $\frac{5}{9}$এর সহিত বন্ধনীর অংশ পৃথক্ হইয়া গেল, এক রহিল না এবং ঐরূপ লিখিলে ভাগের পর $\frac{5}{9}$ এবং তারপর গুণ-চিহ্ন হওয়ায় কেবল $\frac{5}{9}$টি উল্টাইত কিন্তু '×' চিহ্নের পর $\frac{1}{2}$ আর উল্টান চলিত না, সুতরাং উত্তর ভুল হইত।

সাবধান : ঐরূপ ঐ অংশটি করিবার সময় যদি $\frac{5}{9}\times(\frac{3}{11}+\frac{5}{22})$ লেখ তাহা হইলেও ভুল হইবে, কারণ, উহাতেও ভাগের পর কেবল $\frac{5}{9}$কে উল্টাইতে হইবে এবং বন্ধনীর অংশ গুণ-চিহ্নের পর হওয়ায় আর উল্টাইবে না। সর্বদা মনে রাখিবে যে, $\frac{5}{9}$ ও বন্ধনীর মধ্যে কোন চিহ্ন না থাকায় $\frac{5}{9}(\frac{3}{11}+\frac{5}{22})$ সমগ্রটি একটি অংশ এবং সেইজন্য উহাকে সরল করিয়া একই রেখার উপরে ও নীচে রাখা হইয়াছে।]

উদাহরণ 2. $\dfrac{1 \text{ টাকা}}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\frac{1}{4}}}}\div 35$ পয়সা $\times\frac{2}{3}$কে সরল কর।

প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{100 \text{ প.}}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\frac{3}{4}}}}\div 35 \text{ প.}\times\frac{2}{3}=\dfrac{100 \text{ প.}}{1+\dfrac{1}{1+\frac{4}{3}}}\div 35 \text{ প.}\times\frac{2}{3}$

$=\dfrac{100 \text{ প.}}{1+\frac{3}{7}}\div 35 \text{ প.}\times\frac{2}{3}=\dfrac{100 \text{ প.}\times 7}{10}\div 35 \text{ প.}\times\frac{2}{3}$

$=70 \text{ প.}\div 35 \text{ প.}\times\frac{2}{3}=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}.$

উদা. 3. সরল কর : $\dfrac{(2\frac{2}{3}\times 2\frac{2}{3})-(1\frac{3}{4}\times 1\frac{3}{4})}{2\frac{2}{3}-1\frac{3}{4}}\div\dfrac{(3)^2-\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}}{(3+\frac{1}{5})}.$

এরূপ অঙ্ক বীজগণিতের $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ এই সূত্রের সাহায্যে সহজে সরল করা যায়।

প্রদত্ত ভগ্নাংশ $=\dfrac{(2\frac{2}{3})^2-(1\frac{3}{4})^2}{2\frac{2}{3}-1\frac{3}{4}}\div\dfrac{(3)^2-(\frac{1}{5})^2}{3+\frac{1}{5}}$

$=\dfrac{(2\frac{2}{3}+1\frac{3}{4})(2\frac{2}{3}-1\frac{3}{4})}{2\frac{2}{3}-1\frac{3}{4}}\div\dfrac{(3+\frac{1}{5})(3-\frac{1}{5})}{3+\frac{1}{5}}$

$=(2\frac{2}{3}+1\frac{3}{4})\div(3-\frac{1}{5})=\frac{53}{12}\div\frac{14}{5}$

$=\frac{53\times 5}{12\times 14}=\frac{265}{168}=1\frac{97}{168}.$

উদা. 4. A, B ও Cকে কতকগুলি লেবু এরূপে ভাগ করিয়া দিতে হইবে যে A সমস্ত লেবুর $\frac{3}{14}$ অংশ, B $\frac{5}{21}$ অংশ এবং C অবশিষ্ট লেবু পাইবে। ন্যূনপক্ষে কতগুলি লেবু থাকিলে প্রত্যেকে অখণ্ড সংখ্যক লেবু পাইবে ?

A ও B একত্রে সমস্ত লেবুর $(\frac{3}{14}+\frac{5}{21})$ বা $\frac{19}{42}$ অংশ পাইবে। বাকী $(1-\frac{19}{42})$ বা $\frac{23}{42}$ অংশ C পাইবে।

$\because$ প্রত্যেকে অখণ্ড সংখ্যক লেবু পাইবে,

$\therefore$ লেবুর মোট সংখ্যা $\frac{3}{14}$, $\frac{5}{21}$ ও $\frac{23}{42}$এর হরগুলির দ্বারা বিভাজ্য হইতে হইবে।

$\therefore$ 14, 21 ও 42এর ল. সা. গু. লেবুগুলির ন্যূনতম সংখ্যা হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় লেবুর সংখ্যা = 14, 21 ও 42-এর ল. সা. গু.
= 42.

প্রশ্নমালা 2

1. $9\frac{1}{2}\div\dfrac{1}{2+\dfrac{2}{3-\dfrac{3}{4+\frac{4}{5}}}}$ [ক. প্র. 1915]

2. $\dfrac{\dfrac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}}{1-\dfrac{1}{7}\left(\dfrac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}+\frac{1}{3}\right)}$ [পা. প্র. 1890]

3. $\frac{3}{4}(\frac{7}{9}+\frac{1}{12})$ এর $\dfrac{2\frac{3}{4}}{5\frac{1}{6}}\div\dfrac{\text{2 শি. 5 পে.}}{\text{3 শি. 11 পে.}}$ এর $\dfrac{5\frac{7}{8}}{7\frac{1}{4}}$ [ঢা. প্র. 1933]

4. $\dfrac{\text{1 কুই. 61 কি. গ্রা.}}{\text{1 কুই. 18 কি. গ্রা.}}$ এর $\dfrac{\frac{3}{5}+\frac{7}{8}}{\frac{8}{9}+\frac{9}{10}}\div\frac{2}{3}(\frac{3}{7}+\frac{8}{9})$ এর $\dfrac{\text{6 টা. 30 প.}}{\text{8 টা. 30 প.}}$

5. $\dfrac{\text{105 টা. 60 প.}}{11+\dfrac{1}{7+\dfrac{3}{8\frac{1}{4}}}}\div$ 4 টাকা এর $\frac{1}{5}$.

14. 4·8, ·12, ·06   15. ·012, ·009, ·18.

16. কোন্ গরিষ্ঠ দশমিক ভগ্নাংশ দ্বারা 2·5, 3·5 ও ·15 সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য ?

17. কোন্ লঘিষ্ঠ দশমিক সংখ্যা 2·1, 2·8 ও 3·5 দ্বারা সম্পূর্ণ বিভাজ্য ?

18. কতকগুলি আমের $\frac{1}{4}$ অংশ A-কে, $\frac{1}{5}$ অংশ B-কে এবং অবশিষ্টাংশ C-কে দেওয়া হইল। ন্যূনপক্ষে কতগুলি আম ছিল ?

বর্গমূল

§ 4. বর্গমূল নির্ণয় তোমরা পূর্ব শ্রেণীতে শিখিয়াছ। এখানে কয়েকটি প্রশ্নের সমাধান দেখান হইতেছে।

উদাহরণ 1. 2220*এর লুপ্ত অঙ্কটি কত হইলে সংখ্যাটি পূর্ণবর্গ হইবে ?

```
     2'22'0*' | 149
     1
24 | 122
   |  96
289| 260*
   | 2601
```

∴ নির্ণেয় লুপ্ত অঙ্ক = 1.

[এখানে দ্বিতীয় ভাগশেষ 26-এর গায়ে 0* বসান হইল ; এবং 14-র দ্বিগুণ 28 ভাজকের স্থানে বসিল। এখন দেখা যায় যে বর্গমূল 9 হইলে তাহা ভাজকের স্থানে বসাইয়া ভাজককে 9 দ্বারা গুণ করিলে হয় 2601 এবং উহা 260*এর 3টি অঙ্কের সহিত মিলিয়া যায়। ∴ * চিহ্ন স্থানে 1 হইবে।]

উদা. 2. দুইটি সংখ্যার গুণফল 1296 এবং একটি সংখ্যা অপরটির 16 গুণ। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

মনে কর, একটি সংখ্যা x, সুতরাং অন্যটি $16x$, ∴ $x \times 16x = 1296$, অথবা $16x^2 = 1296$, ∴ $x^2 = 81$, ∴ $x = \sqrt{81} = 9$.

অতএব, একটি সংখ্যা = 9, এবং অন্যটি $= 9 \times 16 = 144$.

উদা. 3. 12773 হইতে কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা বিয়োগ করিলে অন্তরফলটি পূর্ণবর্গ হইবে ?

[12773এর বর্গমূল নির্ণয় করিয়া দেখা যাইবে 4 অবশিষ্ট থাকিবে। ঐ 4 বিয়োগ করিলেই সংখ্যাটি পূর্ণবর্গ হইবে।]

উদা. 4. 6700এর সহিত কোন্ লঘিষ্ঠ সংখ্যা যোগ করিলে যোগফলটি পূর্ণবর্গ হইবে ?

```
     67'00' | 81
     64     |
161 | 300
    | 161
      139
```

$81+1=82$.

প্রদত্ত সংখ্যাটি 81^2 অপেক্ষা বৃহত্তর, সুতরাং লঘিষ্ঠ সংখ্যাটি যোগ করিয়া পূর্ণবর্গ করিলে উহা 82^2এর সমান হইবে।

$$82^2 = 6724.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= 6724 - 6700 = 24$.

উদা. 5. কতিপয় বালক একত্রে 134 টাকা 48 পয়সা চাঁদা তুলিল। যতজন বালক ছিল প্রত্যেকে তাহার দ্বিগুণ সংখ্যক পয়সা চাঁদা দিয়াছে। কতজন বালক ছিল ?

দ্বিগুণ সংখ্যক পয়সা = সমান সংখ্যক দুই পয়সা।

এক্ষণে, 134 টা. 48 প. $= (134 \times 50 + 24)$ সংখ্যক দুই পয়সা
$= 6724$ সংখ্যক দুই পয়সা।

$\therefore$ নির্ণেয় বালকসংখ্যা $= \sqrt{6724} = 82$.

উদা. 6. তোমার বিদ্যালয়ের ছাত্রগণকে 15, 18 বা 24 সমান সারিতে সাজান যায় এবং ঘন বর্গাকারেও সাজান যায়। ঐ বিদ্যালয়ে কমপক্ষে কতগুলি বালক আছে ?

```
3 | 15, 18, 24
2 |  5,  6,  8
     5,  3,  4
```

15, 18 ও 24এর ল. সা. গু.
$= 3 \times 2 \times 5 \times 3 \times 4 = 360$, ইহা কিন্তু পূর্ণবর্গ নহে বলিয়া 360 জনকে বর্গাকারে সাজান যায় না। এখন দেখিতে হইবে 360র ন্যূনপক্ষে কতগুণ লইলে পূর্ণবর্গ সংখ্যা হয়। $360 = 3^2 \times 2^2 \times 2 \times 5$.

$\therefore$ নির্ণেয় বালকসংখ্যা $= 3^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 5^2 = 3600$

প্রশ্নমালা 4

বর্গমূল নির্ণয় কর :

1. 3610000 2. 91204 3. 335241 4 29192409
5. 10404 6. 170485249
7. 8275-এর সহিত কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যোগ করিলে যোগফলটি পূর্ণবর্গ হইবে ?
8. 732 হইতে কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা বিয়োগ করিলে বিয়োগফলটি পূর্ণবর্গ হইবে ?
9. 192-কে কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে গুণফলটি পূর্ণবর্গ হইবে ?
10. 1260-কে কোন্ লঘিষ্ঠ সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফলটি পূর্ণবর্গ হইবে ?
11. 1276*-এর লুপ্ত অঙ্কটি কত হইলে সংখ্যাটি পূর্ণবর্গ হইবে ?
12. একদল বালক 10920 টা. 25 প. ব্যয় করিল। যত বালক ছিল প্রত্যেকে ততগুলি 25 প. মুদ্রা ব্যয় করিয়াছিল। ঐ দলে কতজন বালক ছিল ?
13. দুইটি সংখ্যার গুণফল 26908, একটি সংখ্যা অন্যটির 7 গুণ। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।
14. দুইটি সংখ্যার গুণফল 3024 এবং ভাগফল $\frac{3}{7}$; সংখ্যা দুইটি কত ?
15. কোন সেনাপতি তাঁহার সৈন্যগণকে বর্গাকারে সাজাইয়া দেখিলেন 22 জন সৈন্য বেশী আছে। সৈন্যসংখ্যা 9431 হইলে, প্রতি সারিতে কত সৈন্য সাজান ছিল ?
16. একদল ছাত্রকে 10, 15 অথবা 25টি সমান সারিতে এবং পূর্ণবর্গাকারেও সাজান যায়। ন্যূনপক্ষে ঐ দলের ছাত্রসংখ্যা কত হইবে ? [P. U. '35]

---

§ 5. ঐকিক নিয়মে সময় ও কার্য

এ বিষয়ে তোমরা পূর্ব শ্রেণীতে শিখিয়াছ। পুনরালোচনার জন্য পরপৃষ্ঠার উদাহরণগুলি লক্ষ্য কর।

উদা. 1. A ও B যথাক্রমে 18 ও 12 দিনে একটি কাজ করিতে পারে। উভয়ে একত্রে কাজ আরম্ভ করিল এবং কাজ শেষ হইবার 3 দিন পূর্বে B চলিয়া গেল। কাজটি মোট কত দিনে শেষ হইল ?

কাজটি শেষ হইবার 3 দিন আগে B চলিয়া যায়, সুতরাং সেই শেষ 3 দিন A একা কাজ করিয়াছে।

A 18 দিনে কাজটি করিতে পারে,

∴ 1 দিনে করে কাজের $\frac{1}{18}$ অংশ,

∴ A শেষ 3 দিনে কাজের $\frac{1}{18}\times 3$ বা $\frac{1}{6}$ অংশ করিয়াছে।

অতএব, উহার পূর্বে উভয়ে একত্রে কাজটির $(1-\frac{1}{6})$ বা $\frac{5}{6}$ অংশ করিয়াছে। উভয়ে একত্রে 1 দিনে করে $(\frac{1}{18}+\frac{1}{12})$ বা $\frac{5}{36}$ অংশ,

∴ তাহারা $\frac{5}{6}$ অংশ করিয়াছে $(\frac{5}{6}\div\frac{5}{36})$ দিনে বা 6 দিনে।

∴ সমস্ত কাজটি $(6+3)$ বা 9 দিনে শেষ হইয়াছে।

উদা. 2. A একটি কাজ 12 দিনে ও B 16 দিনে করিতে পারে। C-এর সাহায্যে তাহারা 5 দিনে কাজটি সম্পন্ন করিল। যদি কাজটির জন্য তাহারা 96 টাকা পাইয়া থাকে, তবে কে কত টাকা পাইবে ?

A 5 দিনে করে কাজটির $\frac{1}{12}\times 5$ বা $\frac{5}{12}$ অংশ,

∴ A পাইবে 96 টাকার $\times\frac{5}{12}$ বা 40 টাকা,

B 5 দিনে করে কাজটির $\frac{1}{16}\times 5$ বা $\frac{5}{16}$ অংশ,

∴ B পাইবে 96 টাকার $\frac{5}{16}$ বা 30 টাকা।

∴ C পাইবে (96 টাকা − 40 টাকা − 30 টাকা) বা 26 টাকা।

উদা. 3. A 4 দিনে কোন কাজের $\frac{1}{6}$ অংশ, B 3 দিনে অবশিষ্টের $\frac{3}{10}$ অংশ করিল এবং তারপর 6 দিনে C কাজটি শেষ করিল। তিনজনে একত্রে কত দিনে কাজটি করিবে ?

A 4 দিনে কাজটির $\frac{1}{6}$ অংশ করে।

∴ A 1 দিনে কাজটির $\frac{1}{6\times4}$ বা $\frac{1}{24}$ অংশ করে।

অবশিষ্ট কাজ $= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, সুতরাং $\frac{5}{6}$এর $\frac{1}{10} = \frac{1}{12}$.

$\therefore$ B 3 দিনে কাজটির $\frac{1}{12}$ অংশ করে,

$\therefore$ B 1 দিনে কাজটির $\frac{1}{12 \times 3}$ বা $\frac{1}{36}$ অংশ করে।

এখন অবশিষ্ট কাজ $= \frac{5}{6} - \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$ অংশ,

$\therefore$ C 6 দিনে $\frac{3}{4}$ অংশ করিল,

$\therefore$ C 1 দিনে করে কাজটির $\frac{3}{4 \times 6}$ বা $\frac{1}{8}$ অংশ।

$\therefore$ 1 দিনে তিন জনে একত্রে করে কাজটির $(\frac{1}{24} + \frac{1}{36} + \frac{1}{8})$ বা $\frac{7}{36}$ অংশ।

$\therefore$ তাহারা একত্রে সমস্ত কাজটি করে $(1 \div \frac{7}{36})$ দিনে বা $5\frac{1}{7}$ দিনে।

উদা. 4. একটি লোক ও একটি বালক 24 দিনে একটি কাজ করিতে পারে। লোকটি যদি শেষ 6 দিন একা কাজ করে, তবে 26 দিনে কাজটি সম্পন্ন হয়। বালকটি একা কত দিনে কাজটি করিবে ?

শেষ 6 দিন লোকটি একা কাজ করিলে কাজটি 26 দিনে শেষ হয়, সুতরাং উভয়ে $(26 - 6)$ বা 20 দিন একত্রে কাজ করিয়াছে বুঝিতে হইবে।

উভয়ে 1 দিনে করে কাজটির $\frac{1}{24}$ অংশ,

$\therefore$ তাহারা 20 দিনে করিয়াছে $\frac{1 \times 20}{24}$ বা $\frac{5}{6}$ অংশ।

$\therefore$ অবশিষ্ট $(1 - \frac{5}{6})$ বা $\frac{1}{6}$ অংশ লোকটি একা 6 দিনে শেষ করিয়াছে,

$\therefore$ লোকটি 1 দিনে করে কাজটির $\frac{1}{6 \times 6}$ বা $\frac{1}{36}$ অংশ।

$\therefore$ বালকটি 1 দিনে করে কাজটির $(\frac{1}{24} - \frac{1}{36})$ বা $\frac{1}{72}$ অংশ,

$\therefore$ বালকটি একা সমস্ত কাজটি $(1 \div \frac{1}{72})$ বা 72 দিনে করিবে।

উদা. 5. একটি কাজ A 40 দিনে, B 120 দিনে এবং C 60 দিনে করিতে পারে। প্রত্যেক তৃতীয় দিনে B ও Cএর সাহায্য লইয়া A কতদিনে কাজটি শেষ করিবে ?

প্রথম 2 দিনে A একা কাজটির $\frac{1}{40}\times2$ বা $\frac{1}{20}$ অংশ করে।

তৃতীয় দিনে A, B ও C একত্রে কাজটির $(\frac{1}{40}+\frac{1}{120}+\frac{1}{60})$ বা $\frac{1}{20}$ অংশ করে। ∴ প্রতি তিন দিনে কাজটির $(\frac{1}{20}+\frac{1}{20})$ বা $\frac{1}{10}$ অংশ সম্পন্ন হয়।

এক্ষণে, ∵ $\frac{1}{10}$ অংশ সম্পন্ন হয় 3 দিনে,

∴ সমস্ত কাজটি সম্পন্ন হইবে $(3\div\frac{1}{10})$ দিনে বা 30 দিনে।

উদা. 6. 24 জন পুরুষ ও 20 জন বালক 6 দিনে একটি কাজের $\frac{3}{10}$ অংশ করে এবং 6 জন পুরুষ ও 4 জন বালক ঐ কাজের $\frac{2}{5}$ অংশ 40 দিনে করে। 10 জন বালক কাজটি কত দিনে করিবে ?

24 জন পুরুষ + 20 জন বালক 1 দিনে করে $(\frac{3}{10}\div6)$ বা $\frac{1}{20}$ অংশ···(1)

আবার, 6 জন পুরুষ + 4 জন বালক 1 দিনে করে $(\frac{2}{5}\div40)$ বা $\frac{1}{100}$ অংশ,

∴ (উহার 4 গুণ করিলে পাই) 24 জন পুরুষ + 16 জন বালক 1 দিনে করে $(\frac{1}{100}\times4)$ বা $\frac{1}{25}$ অংশ···(2)

এক্ষণে, (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই,

4 জন বালক 1 দিনে করে কাজটির $(\frac{1}{20}-\frac{1}{25})$ বা $\frac{1}{100}$ অংশ,

∴ 1 ,, ,, 1 ,, ,, ,, $\frac{1}{400}$ অংশ,

∴ 10 ,, ,, 1 ,, ,, ,, $\frac{1\times10}{400}$ বা $\frac{1}{40}$ অংশ,

∴ 10 জন বালক সমস্ত কাজটি $(1\div\frac{1}{40})$ বা 40 দিনে করিবে।

উদা. 7. একটি চৌবাচ্চায় তিনটি নল আছে। প্রথম দুইটি নল দ্বারা উহা যথাক্রমে 3 ও 4 ঘণ্টায় জলপূর্ণ হয় এবং তৃতীয় নলটি দ্বারা উহা এক ঘণ্টায় খালি হয়। যদি নল তিনটি যথাক্রমে 1 টা, 2টা ও 3টার সময় খোলা হয়, তবে কখন চৌবাচ্চাটি খালি হইবে ?

প্রথম নলটি 1 ঘণ্টায় $\frac{1}{3}$ অংশ এবং দ্বিতীয় নলটি 1 ঘণ্টায় $\frac{1}{4}$ অংশ ভর্তি করে। তৃতীয় নলটি 1 ঘণ্টায় সমস্ত চৌবাচ্চা খালি করে।

প্রথম নলটি 1টা হইতে 3টা পর্যন্ত 2 ঘণ্টায় $\frac{1}{3}\times 2$ বা $\frac{2}{3}$ অংশ জলপূর্ণ করে এবং দ্বিতীয় নলটি 2টা হইতে 3টা পর্যন্ত 1 ঘণ্টায় $\frac{1}{4}$ অংশ ভর্তি করে।

অতএব, 3টার সময় মোট $(\frac{2}{3}+\frac{1}{4})$ বা $\frac{11}{12}$ অংশ জলপূর্ণ হইয়াছে।

3টার সময় তৃতীয় নলটি খোলায়, তিনটি নলই এখন খোলা থাকিল। 3টি নল একত্রে খোলা থাকিলে 1 ঘণ্টায় খালি হয় $(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4})$* অংশ বা $\frac{5}{12}$ অংশ।

$\therefore$ $\frac{11}{12}$ অংশ খালি হইবে $(\frac{11}{12}\div\frac{5}{12})$ বা $\frac{11}{5}$ ঘণ্টায় বা 2 ঘণ্টা 12 মিনিটে।

$\therefore$ চৌবাচ্চাটি 3টার 2ঘণ্টা 12 মিনিট পরে অর্থাৎ 5টা 12 মিনিটে জলশূন্য হইবে।

[***দ্রষ্টব্য :** তৃতীয় নলটি খোলা থাকিলে 1 ঘণ্টায় পূরা চৌবাচ্চা (পূরা 1) খালি হয়। কিন্তু ঐ সঙ্গে প্রথম ও দ্বিতীয় নল $\frac{1}{3}$ ও $\frac{1}{4}$ অংশ ভর্তি করে, সেজন্য ঘণ্টায় খালি হয় $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ অংশ।]

উদা. 8. একটি বালক ও একটি বালিকা কোন চৌবাচ্চা জলপূর্ণ করিবার জন্য বালকটি প্রতি 3 মিনিটে 4 কিলোলিটার এবং বালিকা প্রতি 4 মিনিটে 3 কি. লিটার করিয়া জল উহাতে ঢালিতে লাগিল। চৌবাচ্চায় যদি 8 মিরিয়া লিটার 4 কি. লিটার জল ধরে, তবে কতক্ষণে উহা জলপূর্ণ হইবে ?

3 মিনিট ও 4 মিনিটের ল. সা. গু. 12 মিনিট। 12 মিনিটে বালকটি 4 বার ও বালিকাটি 3 বার জল ঢালে। বালক 4 বারে (4 কি.লি. × 4) বা 16 কি.লি. এবং বালিকা 3 বারে (3 কি.লি. × 3) বা 9 কি.লি. জল ঢালে।

∴ প্রতি 12 মিনিটে মোট (16 + 9) বা 25 কি. লি. জল ঢালা হয়।

8 মিরি. লি. 4 কি.লি. = 84 কি. লিটার। 84 কি. লিটারের মধ্যে 25 কি. লি. 3 বার আছে। অতএব, 12 মিনিট × 3 বা 36 মিনিটে 25 কি. লি. × 3 বা 75 কি. লি. জল ঢালা হইবে। আর জল ঢালিতে বাকি থাকিল (84 − 75) বা 9 কি. লি.। ঐ 36 মিনিটের পরবর্তী তৃতীয় মিনিটে বালকটি আসিয়া জল ঢালিল আরও 4 কি. লি. এবং চতুর্থ মিনিটে বালিকা জল ঢালিল 3 কি. লি.; ইহাতে মোট (75 + 7) বা 82 কি. লি. জল ঢালা হইল। বালকটি ষষ্ঠ মিনিটে আবার 4 কি. লি. জল আনিয়া মাত্র 2 কি. লি. জল ঢালিলেই চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইবে।

অতএব, চৌবাচ্চাটি জলপূর্ণ হইতে মোট (36 + 6) বা 42 মিনিট সময় লাগিবে।

প্রশ্নমালা 5

1. A ও B একটি কাজ যথাক্রমে 9 ও 18 দিনে করিতে পারে। তাহারা একত্রে কাজ আরম্ভ করিয়া কাজটি শেষ হইবার 3 দিন পূর্বে A চলিয়া গেল। কাজটি কতদিনে সম্পন্ন হইল? [ক. প্র. 1934]
2. A $3\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় একটি কার্যের অর্ধেক করিল, B $1\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় অবশিষ্ট কাজের $\frac{1}{4}$ অংশ করার পর C $5\frac{1}{4}$ ঘণ্টায় কাজটি শেষ করিল। তিনজনে একত্রে কতক্ষণে কাজটি করিতে পারে?
3. প্রত্যহ 7 ঘণ্টা কাজ করিয়া একটি কার্য A 6 দিনে ও B 8 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। প্রত্যহ 8 ঘণ্টা কাজ করিয়া উভয়ে একত্রে কতদিনে উহা সম্পন্ন করিবে? [ক. প্র. 1930]

4. A, B ও C কোন কাজ যথাক্রমে 15, 12 ও 10 ঘণ্টায় করিতে পারে। তাহারা একসঙ্গে কাজ আরম্ভ করিল, কিন্তু A 3 ঘণ্টা পরে এবং B কাজ শেষ হইবার 2 ঘণ্টা পূর্বে চলিয়া গেল। কাজটি কত ঘণ্টায় শেষ হইয়াছিল ?

5. A ও B যথাক্রমে 8 ও 6 দিনে একটি কাজ করিতে পারে ; কিন্তু C-এর সাহায্যে তাহারা 3 দিনে কাজটি শেষ করিয়া 8 টাকা 16 পয়সা মজুরী পাইল। কে কত টাকা পাইবে ?

6. একটি লোক ও একটি বালক 36 দিনে একটি কাজ করিতে পারে। লোকটি যদি শেষ 10 দিন একা কাজ করে, তবে কাজটি শেষ হইতে 40 দিন লাগে। বালকটি একাকী কত দিনে কাজটি করিবে ?

7. A একা B ও C-এর সমান কাজ করিতে পারে। একটি কাজ A ও B একত্রে 9 ঘণ্টা 36 মিনিটে করে এবং C তাহা 48 ঘণ্টায় করে। B একাকী উহা কত ঘণ্টায় করিবে ? [পা. প্র. 1926]

8. একটি চৌবাচ্চা 10 ঘণ্টায় জলপূর্ণ হয়, কিন্তু তলদেশে ছিদ্র হওয়ায় উহা পূর্ণ হইতে 2 ঘণ্টা অধিক সময় লাগিল। ঐ ছিদ্র দিয়া কতক্ষণে জলপূর্ণ চৌবাচ্চাটি জলশূন্য হইবে ?

9. কোন একটি কাজ A 20 দিনে এবং A ও B একত্রে $11\frac{1}{9}$ দিনে করিতে পারে। A একা 8 দিন, A ও C একত্রে 6 দিন কাজ করার পর B একা 3 দিনে কাজটি শেষ করিল। B ও C একত্রে কাজটি কতদিনে করিতে পারে ? [ঢা. বো. 1935]

10. A একদিনে B-এর 3 গুণ কাজ করে। উভয়ে একটি কাজের $\frac{2}{5}$ অংশ 9 দিনে করিল। প্রত্যেকে সমগ্র কাজটি কতদিনে করিতে পারিবে ? [ক. প্র. 1946]

11. দুইটি নল দ্বারা যথাক্রমে 20 ও 30 মিনিটে একটি চৌবাচ্চা ভর্তি হয়। উভয় নল খুলিয়া দিবার কতক্ষণ পরে প্রথম নলটি বন্ধ করিলে আর 10 মিনিটে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইবে ? [ক. প্র. 1926]

12. A, B ও C যথাক্রমে 20 দিনে, 30 দিনে ও 60 দিনে একটি কাজ করিতে পারে। প্রতি তৃতীয় দিনে B ও C-এর সাহায্য লইয়া A কতদিনে কাজটি সম্পন্ন করিবে ?

13. দুইটি নল যথাক্রমে 20 ও 30 মিনিটে একটি চৌবাচ্চা জলপূর্ণ করিতে পারে। যখন উহা জলশূন্য ছিল তখন নল দুইটি খোলা হইল এবং কিছুক্ষণ পরে প্রথম নলটি বন্ধ করা হইল। যদি চৌবাচ্চাটি মোট 18 মিনিটে জলপূর্ণ হইয়া থাকে, তবে কখন প্রথম নলটি বন্ধ করা হইয়াছিল?

14. 12 জন পুরুষ ও 10 জন বালক 3 দিনে একটি কাজের $\frac{3}{4}$ অংশ করে এবং 4 জন পুরুষ ও 5 জন বালক 7 দিনে কাজটির $\frac{7}{10}$ অংশ করিতে পারে। 10 জন পুরুষ কত দিনে কাজটি করিতে পারিবে?

15. একটি চৌবাচ্চায় 3টি নল সংযুক্ত আছে। প্রথমটি 3 ঘণ্টায় ও দ্বিতীয় নলটি 3 ঘণ্টা 45 মিনিটে চৌবাচ্চাটি জলপূর্ণ করিতে পারে এবং তৃতীয় নলটি 1 ঘণ্টায় উহাকে জলশূন্য করে। যদি নল তিনটি যথাক্রমে 1টা, 2টা ও 3টার সময় খুলিয়া দেওয়া হয়, তবে কখন চৌবাচ্চাটি জলশূন্য হইবে? [পা. প্র. '29]

16. একটি পিপায় 3টি নল সংলগ্ন আছে। প্রথম দুইটি দ্বারা 20 মিনিটে ও 30 মিনিটে পিপাটি জলপূর্ণ হয় এবং তৃতীয়টি দ্বারা 40 মিনিটে পিপাটি জলশূন্য হয়। তিনটি নল একসময়ে খুলিয়া 15 মিনিট পরে প্রথমটি বন্ধ করা হইল। কতক্ষণে পিপাটি জলপূর্ণ হইবে? [ছাত্র. 1892]

17. একটি চৌবাচ্চায় দুইটি নল আছে। প্রথমটি দ্বারা উহা 40 মিনিটে ভর্তি হয় এবং দ্বিতীয়টি দ্বারা 1 ঘণ্টায় খালি হয়। যদি পর পর মিনিটে পর্যায়ক্রমে একটি করিয়া নল খোলা থাকে, তবে কত সময়ে চৌবাচ্চাটি জলপূর্ণ হইবে? [পা. প্র. 1931]

18. তিনটি বালক একটি চৌবাচ্চা জলপূর্ণ করিতে আরম্ভ করিল। প্রথম বালক 5 মিনিটে 1 পাঁইট, দ্বিতীয় বালক 6 মিনিটে 1 কোয়ার্ট এবং তৃতীয় বালক 8 মিনিটে 1 গ্যালন জল ঢালে। যদি ঐ চৌবাচ্চায় $50\frac{1}{2}$ গ্যালন জল ধরে, তবে কতক্ষণে উহা পূর্ণ হইবে? [ক.প্র. 1941]
[2 পাঁইট = 1 কোয়ার্ট, 4 কোয়ার্ট = 1 গ্যালন]

19. 3 জন পুরুষ ও 2 জন বালক একত্রে একটি কাজ 15 দিনে করিতে পারে এবং 2 জন পুরুষ ও 3 জন বালক একত্রে উহা 18 দিনে করিতে পারে। একজন পুরুষ ও একজন বালক একত্রে উহা কতদিনে করিবে? [ক. প্র. '50]

20. একটি চৌবাচ্চা 3টি নল দ্বারা যথাক্রমে 30, 40 ও 60 মিনিটে ভর্তি হয় এবং চতুর্থ নলটি দ্বারা উহা আধ ঘণ্টায় খালি হয়। বেলা 12টার সময় প্রথম 3টি নলই খুলিয়া দেওয়া হয়, কিন্তু ভুলক্রমে চতুর্থ নলটিও *15* মিনিট পর্যন্ত খোলা থাকে, তৎপরে উহাকে বন্ধ করা হয়। কখন চৌবাচ্চাটি ভর্তি হইবে? [মা. প্র. 1891]

21. একটি শামুক 6 মিটার উচ্চ একটি খুঁটির গা দিয়া উপরে উঠিতে লাগিল। সে এক মিনিটে 9 ডেসিমিটার উঠে এবং ঠিক তার পর-মিনিটে 2 ডেসিমিটার নামিয়া পড়ে। এই ভাবে শামুকটি কতক্ষণে খুঁটিটির মাথার উপরে উঠিবে?

---

§ 6. ঐকিক নিয়মে সুদকষা :

তোমরা পূর্ব শ্রেণীতে সুদকষা শিখিয়াছ। এখানে কয়েকটি উদাহরণের সাহায্যে উহার সংক্ষেপে পুনরালোচনা করা হইতেছে।

উদাহরণ 1. বার্ষিক $4\frac{1}{4}\%$ হার সুদে 2187 টা. 50 পয়সার 219 দিনের সুদ কত?

2187 টা. 50 প. $= \frac{4375}{2}$ টা.; 219 দিন $= \frac{219}{365}$ ব. $= \frac{3}{5}$ বৎসর।

100 টাকার 1 বৎসরের সুদ $= \frac{17}{4}$ টাকা,

∴ 1 ,, 1 ,, ,, $= \frac{17}{4\times100}$ টা.

∴ 1 ,, $\frac{3}{5}$,, ,, $= \frac{17}{4\times100} \times \frac{3}{5}$ টা.

∴ $\frac{4375}{2}$,, ,, ,, ,, $= \frac{17\times3}{4\times100\times5} \times \frac{4375}{2}$ টা.

$= \frac{1785}{32}$ টা. $=$ 55 টা. 78 প. (আসন্ন)।

∴ নির্ণেয় সুদ $=$ 55 টা. 78 প. (আসন্ন)।

উদা. 2. বার্ষিক 5% হার সুদে 1940 সালের 8ই ফেব্রুয়ারী হইতে 21শে এপ্রিল পর্যন্ত 525 টাকার সবৃদ্ধিমূল কত হইবে?

এখানে 1940 সাল লিপইয়ার বলিয়া ফেব্রুয়ারী মাস 29 দিনে,

সুতরাং মোট সময় $=$ 21 দিন (ফে.) $+$ 31 দিন (মা.) $+$ 21 দিন (এ.)

$=$ 73 দিন $= \frac{1}{5}$ বৎসর।

এক্ষণে, 100 টাকার 1 বৎসরের সুদ $= 5$ টাকা,

$\therefore$ „ „ $\frac{1}{5}$ „ „ $= 5 \times \frac{1}{5}$ টা. $= 1$ টা.,

$\therefore$ 1 „ „ „ „ $= \frac{1}{100}$ টা.,

$\therefore$ 525 „ „ „ „ $= \frac{1}{100} \times 525$ টা.,

$= 5$ টা. 25 প.

$\therefore$ নির্ণেয় সবৃদ্ধিমূল $= 525$ টা. $+ 5$ টা. 25 প. $= 530$ টা. 25 প.।

উদা. 3. কত টাকা $6\frac{2}{3}\%$ হার সুদে 5 বৎসরে সুদেমূলে 100 টাকা হইবে ?

100 টাকার 1 বৎসরের সুদ $= \frac{20}{3}$ টাকা,

$\therefore$ „ „ 5 „ „ $= \frac{20}{3} \times 5$ টা. $= \frac{100}{3}$ টা.

$\therefore$ 100 টাকার সবৃদ্ধিমূল $= 100$ টা. $+ \frac{100}{3}$ টা. $= \frac{400}{3}$ টা.,

এক্ষণে, $\frac{400}{3}$ টাকা সবৃদ্ধিমূল হইলে আসল $= 100$ টা.,

$\therefore$ 1 „ „ „ „ $= \frac{100 \times 3}{400}$ টা. $= \frac{3}{4}$টা.,

$\therefore$ 100 „ „ „ „ $= \frac{3}{4} \times 100$ টা. $= 75$টা.

$\therefore$ নির্ণেয় আসল $= 75$ টাকা।

উদা. 4. যদি 5 বৎসর 6 মাসে 750 টাকার সবৃদ্ধিমূল 873 টাকা 75 পয়সা হয়, তবে বার্ষিক শতকরা সুদের হার কত ?

এখানে আসল $= 750$ টা., সুদ $=$ সবৃদ্ধিমূল $-$ আসল

$= 873$ টা. 75 প. $- 750$ টা. $= 123$ টা. 75 প.

$= \frac{495}{4}$ টাকা।

এক্ষণে, 750 টাকার $5\frac{1}{2}$ বৎসরের সুদ $= \frac{495}{4}$ টা.,

$\therefore$ „ „ 1 „ „ $= \frac{495}{4} \times \frac{2}{11}$ টা. $= \frac{45}{2}$ টা.,

$\therefore$ 1 „ „ „ „ $= \frac{45}{2 \times 750}$ টা.

$\therefore$ 100 „ „ „ „ $= \frac{45 \times 100}{2 \times 750}$ টা. $= 3$ টাকা।

$\therefore$ নির্ণেয় সুদের হার $=$ বার্ষিক 3%.

উদা. 5. বার্ষিক 10% হার সুদে কত বৎসরে কোন টাকার সুদ সবৃদ্ধিমূলের $\frac{2}{5}$ হইবে ?

মনে কর, সবৃদ্ধিমূল = 100 টাকা, ∴ সুদ = 100 × $\frac{2}{5}$ টা.
= 40 টাকা.

∴ আসল = 100 টা. − 40 টা. = 60 টাকা।

এক্ষণে, 100 টাকার 1 বৎসরের সুদ = 10 টাকা,

∴ 1 " " " " = $\frac{10}{100}$ টা. = $\frac{1}{10}$ টা.

∴ 60 " " " " = $\frac{1}{10}$ টা. × 60 = 6 টাকা।

∴ নির্ণেয় সময় = মোট সুদ ÷ আসলের 1 বৎসরের সুদ
= (40 ÷ 6) ব. = $6\frac{2}{3}$ বৎসর।

প্রশ্নমালা 6

1. বার্ষিক $6\frac{1}{4}$% হার সুদে 625 টাকার 4 বৎসরের সুদ কত হইবে ?
2. বার্ষিক 4% হার সুদে 425 টাকার 9 মাসে সবৃদ্ধিমূল কত হইবে ?
3. বার্ষিক 5% হার সুদে 12ই জুন হইতে 5ই নভেম্বর পর্যন্ত 5050 টাকার সুদ কত হইবে ?
4. বার্ষিক $4\frac{1}{18}$% হার সুদে কত টাকার দৈনিক সুদ এক টাকা হইবে ? [C. U.]
5. বার্ষিক শতকরা কত হার সুদে 1350 টাকার 3 বৎসরের সবৃদ্ধিমূল 1532 টা. 25 প. হইবে ?
6. 2125 টাকার 7 বৎসরের সবৃদ্ধিমূল $2943\frac{1}{4}$ টাকা হইলে, সুদের হার কত ?
7. বার্ষিক 5% হার সুদে 3 বৎসরে কত টাকার সবৃদ্ধিমূল 690 টাকা হইবে ?
8. $6\frac{1}{4}$% বার্ষিক সুদ হইলে কত টাকা 4 বৎসরে সুদেমূলে 625 টাকা হইবে ?

9. সুদে-আসলে যদি 5 বৎসরে 2200 টাকা হয় এবং সুদের পরিমাণ আসলের $\frac{3}{8}$ হয়, তবে আসল ও বার্ষিক শতকরা সুদের হার কত?
10. বার্ষিক $6\frac{2}{3}\%$ হার সুদে কত বৎসরে 1350 টাকার সবৃদ্ধিমূল 1620 টাকা হইবে?
11. 4% হার সুদে কোন টাকার 6 বৎসরে 930 টাকা সবৃদ্ধিমূল হইল; কত বৎসরে উহার সবৃদ্ধিমূল 1020 টাকা হইবে?
12. তুমি যদি 250 টাকা ধার করিয়া $1\frac{1}{2}$ বৎসরে 45 টাকা সুদ দাও, তবে সুদের হার কত?
13. 8% হার সুদে কত বৎসরে 350 টাকার সবৃদ্ধিমূল 420 টাকা হয়?
14. বার্ষিক $7\frac{1}{2}\%$ হার সুদে কত বৎসরে 2975 টা. 75 প. সুদেমূলে দ্বিগুণ হইবে?
15. কোন আসল হইতে 4 বৎসরে 792 টাকা এবং $6\frac{1}{2}$ বৎসরে 912 টাকা সবৃদ্ধিমূল হইলে সুদের হার ও আসল কত?
16. আমি 8% হারে টাকা ধার করিয়া 3 বৎসর পরে 620 টাকা দিয়া সেই ধার শোধ করিলাম। আমি কত টাকা ধার করিয়াছিলাম?
17. যদি 1লা জানুয়ারী হইতে 30শে সেপ্টেম্বর পর্যন্ত 425 টাকার 12 টাকা 75 প. সুদ দিতে হয়, তবে সুদের হার কত?
18. যে ব্যাঙ্ক বার্ষিক 5% হারে সুদ দেয় তাহাতে আমি কত টাকা গচ্ছিত রাখিলে প্রতি বৎসর অষ্টম শ্রেণী হইতে বাৎসরিক পরীক্ষায় উত্তীর্ণ প্রথম স্থানীয় ছাত্রকে 150 টাকা মূল্যের পদক পুরস্কার দিতে পারিব?
19. বার্ষিক সুদের হার 5% হইতে $5\frac{1}{2}\%$ হওয়ায় এক ব্যক্তির ব্যাঙ্কে গচ্ছিত টাকার মোট বার্ষিক সুদ 42 টাকা 50 পয়সা বৃদ্ধি পাইল। ঐ গচ্ছিত টাকার পরিমাণ কত?
20. এক ব্যক্তি সমপরিমাণ টাকা যথাক্রমে বার্ষিক $3\frac{1}{4}\%$ ও $1\frac{3}{4}\%$ সুদে ধার দিলেন এবং 18 মাস পরে মোট 510 টাকা সুদ পাইলেন। তিনি মোট কত টাকা ধার দিয়াছিলেন?

দ্বিতীয় অধ্যায়

গড় নির্ণয়

[নূতন পাঠ]

§ 7. 'গড়' কথাটি তোমরা প্রায়ই শুনিয়া থাকিবে। যেমন—পতৌদি তিনটি টেস্ট খেলায় গড়ে 46 রাণ করিয়াছে, একজন বাঙালী গড়ে 11টি ডিম বৎসরে খায়, একটি অঞ্চলে বৎসরে গড়ে 38″ বৃষ্টিপাত হয়, ইত্যাদি। এই গড় হিসাব বর্তমানে সামাজিক নানা কাজে, বিভিন্ন পরিকল্পনায়, লোক গণনা প্রভৃতি কাজে বিশেষভাবে প্রয়োজন হয়। গড় কথাটির ইংরাজী প্রতিশব্দ এ্যাভারেজ (Average)। ইংরাজী 'Average' কথাটি ল্যাটিন হ্যাভারিয়া শব্দ হইতে উৎপন্ন। হ্যাভারিয়া কথাটির ল্যাটিন অর্থ হইল নিজ অংশ হইতে কিছু দিয়া অপরের ঘাটতি পূরণ করিয়া সমপর্যায়ে আনা। গড় শব্দের বাংলা অর্থ মাঝামাঝি হিসাব।

গড়ের সংজ্ঞা হিসাবে বলা যায় যে—সমজাতীয় কতকগুলি রাশির যোগফলকে সেই রাশিগুলির সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিয়া যে ভাগফল হয় তাহাকে ঐ রাশিগুলির **গড়** (Average) বলে। যথা,—মনে কর, এক ব্যক্তি প্রথম দিন 3 কি. গ্রা., দ্বিতীয় দিন 5 কি. গ্রা. এবং তৃতীয় দিন 10 কি. গ্রা. দুধ বিক্রয় করিল। সে দিন গড়ে কত দুধ বিক্রয় করিল তাহা নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমে দেখিতে হইবে এখানে কয়টি রাশি আছে এবং তাহাদের যোগফল কত। এখানে, 3 কি. গ্রা., 5 কি. গ্রা. ও 10 কি. গ্রা. এই **তিনটি** এক জাতীয় রাশি আছে এবং ইহাদের যোগফল $(3+5+10)$ কি. গ্রা. বা 18 কি. গ্রা.। 18 কি. গ্রামকে 3 দিয়া ভাগ করিলে হয় 6 কি. গ্রা.। অতএব, সে ব্যক্তি গড়ে দিন 6 কিলোগ্রাম দুধ বিক্রয় করিয়াছিল বলা যাইবে।

আবার দেখ, গড়কে রাশিগুলির সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে রাশিগুলির সমষ্টির সমান হইবে। উপরের উদাহরণে গড় 6কে রাশির সংখ্যা 3 দ্বারা গুণ করিলে রাশিগুলির সমষ্টির সমান 18 হয়।

§ 8. এই প্রকার গড়কে পাটীগাণিতিক গড় বলে। ইহা দুই প্রকার হইয়া থাকে। যথা, **সহজ গড়** (Simple Average) ও **ভারযুক্ত গড়** (Weighted Average).

সহজ গড় নির্ণয়ের সূত্র : যদি a, b, c,···প্রভৃতি N সংখ্যক বিভিন্ন একটি করিয়া রাশি হয়,

$$\text{তবে তাহাদের গড়} = \frac{a+b+c+\cdots}{N}$$

$$\text{গড়} = \frac{\text{সমজাতীয় রাশিগুলির যোগফল}}{\text{রাশিগুলির সংখ্যা}}\text{।}$$

উদাহরণ 1. A, B ও C তিন জনের বয়স যথাক্রমে 8 বৎসর 10 মাস, 15 বৎসর 6 মাস এবং 12 বৎসর 5 মাস। উহাদের বয়সের গড় কত ?

রাশিগুলির সমষ্টি = 8 বৎসর 10 মাস + 15 বৎসর 6 মাস + 12 বৎসর 5 মাস = 36 বৎসর 9 মাস, এবং রাশির সংখ্যা = 3.

∴ নির্ণেয় বয়সের গড় = 36 ব. 9 মাস ÷ 3 = 12 বৎসর 3 মাস।

ভারযুক্ত গড় : সহজ গড়ের কথা উপরে বলা হইয়াছে। সহজ গড়ে প্রত্যেক প্রকারের রাশির সংখ্যা 1 হয়। যথা, 10 টাকা মূল্যের একটি, 15 টাকা মূল্যের একটি, 17 টাকা মূল্যের একটি কাপড়, ইত্যাদি। এখানে প্রত্যেক রকমের একটি করিয়া সংখ্যা আছে। কিন্তু যদি বলা হয় 10 টাকা দরের 3 খানি, 15 টাকা দরের 5 খানি ও 17 টাকা দরের 2 খানি কাপড়ের মূল্যের গড় কত, তবে সেই গড়কে **ভারযুক্ত গড়** বলে। এখানে ভার বা **গুরুত্ব** শব্দে ওজন বুঝাইতেছে না, উহা দ্বারা প্রত্যেক প্রকার কাপড়ের সংখ্যার গুরুত্ব বা ভার (অর্থাৎ সংখ্যায় কত) তাহাই বুঝায়। নিম্নে উদাহরণ 2 দেখ।

উদাহরণ 2. এক ব্যক্তি 1 টাকা 2 পয়সা কিলোগ্রাম দরে 10 কি.গ্রা., 1 টা. 14 প. কিলোগ্রাম দরে 8 কি.গ্রা. এবং 84 পয়সা

কিলোগ্রাম দরে 12 কিলোগ্রাম গম ক্রয় করিল। গড়ে গমের প্রতি কিলোগ্রামের দর কত পড়িল ?

1 টা. 2 প. দরে 10 কি. গ্রামের মূল্য = 1 টা. 2 প. × 10
= 10 টাকা 20 পয়সা,
1 টা. 14 প. " 8 " " = 1টা. 14প. × 8
= 9 টাকা 12 পয়সা,
84 প. " 12 " " = 84 প. × 12
= 10 টাকা 8 পয়সা

∴ মোট 30 কি. গ্রামের মূল্য = 29 টা. 40 পয়সা

∴ গড়ে প্রতি কিলোগ্রামের মূল্য = 29 টা. 40 প. ÷ 30 = 98 প.।

ভারযুক্ত গড় নির্ণয়ের সূত্র ঃ মনে কর N সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুগুলির সংখ্যা যথাক্রমে $f_1, f_2, f_3, \cdots\cdots, f_n$ এবং উহাদের মূল্যগুলি যথাক্রমে $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n$ (প্রত্যেকটির মূল্য)। ইহাদের মূল্যের নির্ণেয় গড়

$$=\frac{f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3+\cdots\cdots+f_nx_n}{f_1+f_2+f_3+\cdots\cdots+f_n}.$$

উদা. 3. নিম্নের তালিকায় 30 জন ছাত্রের কোন এক বিষয়ের পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরগুলি দেওয়া হইল। ঐ নম্বরের গড় নির্ণয় কর।

ছাত্র সংখ্যা	4	2	3	5	7	5	4
নম্বর	50	55	63	70	71	80	91

[S. F. '67(C)]

নির্ণেয় গড়

$$=\frac{50\times4+55\times2+63\times3+70\times5+71\times7+80\times5+91\times4}{30}$$

$$=\frac{200+110+189+350+497+400+364}{30}=\frac{2110}{30}$$

= 70·33 [দুই দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ]।

বিবিধ উদাহরণ

উদা. 4. A, B ও C-এর নিকট গড়ে 60 টাকা এবং B, C ও D এর নিকট গড়ে 50 টাকা আছে। যদি D-এর 25 টাকা থাকে তবে A-এর কত টাকা আছে ?

A, B ও C-এর টাকার সমষ্টি = 60 টা. × 3 = 180 টাকা

B, C ও D " " " = 50 টা. × 3 = 150 টাকা

∴ B ও C " " " = 150 টা. − 25 টা. = 125 টাকা ;

∴ নির্ণেয় A-এর টাকা = 180 টা. − 125 টা. = 55 টাকা।

উদা. 5. এক পাঠশালার 30 জন বালকের ওজনের গড় 44 কিলোগ্রাম, উহাদের সহিত শিক্ষকের ওজন লইলে গড় ওজন 2 কি. গ্রা. করিয়া বাড়ে। শিক্ষকের ওজন কত ?

[প্রথম প্রণালী]

30 জন বালকের মোট ওজন = 44কি. গ্রা. × 30 = 1320 কি.গ্রা. ;
শিক্ষককে ধরিয়া মোট 31 জনের ওজনের গড়

= 44 কি. গ্রা. + 2কি. গ্রা. = 46 কি. গ্রা.

∴ 31 জনের মোট ওজন = 46 কি. গ্রা. × 31 = 1426 কি.গ্রা.।

∴ শিক্ষকের ওজন = 1426 কি.গ্রা. − 1320 কি. গ্রা.

= 106 কি. গ্রাম।

[দ্বিতীয় প্রণালী]

শিক্ষক সমেত মোট 31 জন হইল এবং প্রত্যেকের গড় ওজন 2 কি. গ্রা. বৃদ্ধি হওয়ায় পূর্বাপেক্ষা মোট ওজন (2 কি. গ্রা. × 31) বা 62 কি. গ্রা. বেশী হইবে।

∴ শিক্ষকের ওজন = 44 কি. গ্রা. + 62 কি. গ্রা. = 106 কি. গ্রাম।

উদা. 6. গড়ে মাসিক আয় রাম ও শ্যামের 140 টাকা, শ্যাম ও হরির 156 টাকা এবং হরি ও রামের 144 টাকা। প্রত্যেকের প্রকৃত আয় কত ?

রাম ও শ্যামের মোট মাসিক আয় = 140 টা. × 2 = 280 টাকা
শ্যাম ও হরির " " " = 156 টা. × 2 = 312 টাকা
হরি ও রামের " " " = 144 টা. × 2 = 288 টাকা

∴ (যোগ) রাম, শ্যাম ও হরির মোট মাসিক আয়ের দ্বিগুণ
= 880 টাকা

∴ রাম, শ্যাম ও হরির মোট মাসিক আয় = 880 টা. ÷ 2
= 440 টাকা।

∴ রামের মাসিক আয় = 440 টা. − 312 টা. = 128 টা.
∴ শ্যামের " " = 440 টা. − 288 টা. = 152 টা.
এবং হরির " " = 440 টা. − 280 টা. = 160 টা.

উদা. 7. কোন বিদ্যালয়ে সোম হইতে শনিবার পর্যন্ত উপস্থিত ছাত্রসংখ্যার গড় 315 ; প্রথম 3 দিনের উপস্থিত ছাত্র-সংখ্যা গড়ে 310 এবং শেষ 4 দিন গড়ে 325 ছিল। তৃতীয় দিনে কত জন ছাত্র উপস্থিত ছিল ?

প্রথম 3 দিন বলিতে সোম, মঙ্গল ও বুধবার এবং শেষ 4 দিন হইল বুধ, বৃহস্পতি, শুক্র ও শনিবার (কারণ, রবিবার বন্ধ)। তাহা হইলে দেখা যায় যে, গড় নির্ণয়ের সময় বুধবার অর্থাৎ তৃতীয় বারটি দুইবার ধরা হইয়াছে।

প্রথম 3 দিনের উপস্থিত ছাত্র-সংখ্যার সমষ্টি = 310 × 3 = 930
শেষ 4 " " " " = 325 × 4 = 1300
∴ প্রথম 3 দিন ও শেষ 4 দিনে মোট উপস্থিত ছাত্র-সংখ্যা
= 930 + 1300 = 2230.

ইহাতে বুধবারকে দুইবার ধরিয়া মোট 7 দিনের উপস্থিত ছাত্র-সংখ্যা হইল 2230. ইহা হইতে যদি বুধবারকে একবার ধরিয়া 6 দিনের অর্থাৎ সব কয়দিনের মোট উপস্থিত ছাত্র-সংখ্যা বাদ দেওয়া

যায়, তবে কেবল বুধবার বা তৃতীয় দিনের উপস্থিত ছাত্র-সংখ্যা পাওয়া যাইবে।

এক্ষণে, 6 দিন বা সব কয়দিনের উপস্থিত ছাত্র-সংখ্যার সমষ্টি
$$=315\times 6=1890.$$

∴ তৃতীয় দিনের উপস্থিত ছাত্র-সংখ্যা $=2230-1890=340.$

উদা. ৪. একটি ট্রেন হাওড়া হইতে ঘণ্টায় 55 কি. মি. বেগে বর্ধমানে গিয়া ঘণ্টায় 66 কি. মি. বেগে ফিরিয়া আসিল। সমগ্র ভ্রমণে উহার গতির গড় নির্ণয় কর।

যাইবার সময় 1 কি. মিটারে সময় লাগে $\frac{1}{৫৫}$ ঘণ্টা এবং ফিরিবার সময় 1 কি. মিটারে সময় লাগে $\frac{1}{৬৬}$ ঘণ্টা। অতএব, 1 কি. মি. যাইতে ও 1 কি. মি. আসিতে অর্থাৎ 2 কি. মি. ভ্রমণে সময় লাগে $(\frac{1}{৫৫}+\frac{1}{৬৬})$ বা $\frac{1}{৩০}$ ঘণ্টা।

∴ গড়ে প্রতি কি. মিটারে সময় লাগে $\frac{1}{৩০}\times\frac{1}{২}$ বা $\frac{1}{৬০}$ ঘণ্টা।

∴ গড়ে ঘণ্টায় 60 কি. মিটার যাওয়া (গতি) হইল।

[অন্য প্রণালী]: 55 ও 66র ল. সা. গু. $=330$. মনে কর, স্থান দুইটির মধ্যে দূরত্ব 330 কি. মি.। 330 কি. মি. যাইতে সময় লাগে $(330\div 55)$ বা 6 ঘণ্টা এবং ফিরিতে সময় লাগে $(330\div 66)$ বা 5 ঘণ্টা।

∴ মোট $(6+5)$ বা 11 ঘণ্টায় মোট (330×2) বা 660 কি.মি. যাওয়া হইল।

∴ ট্রেনটি গড়ে ঘণ্টায় $(660\div 11)$ বা 60 কি. মি. গিয়াছে।

[দ্রষ্টব্য : এক্ষেত্রে 55 ও 66এর যোগফলকে 2 দিয়া ভাগ করিয়া গড় নির্ণয় করিলে ভুল হইবে।]

প্রশ্নমালা 7

মুখে মুখে গড় নির্ণয় কর :—

1. 9, 11, 16
2. 7, 4, 6, 5
3. $1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}, 4\frac{1}{4}$
4. 3·5, 4·7, 1·1

5. 15 টাকা, 12 টাকা 60 পয়সা, 3 টাকা 15 পয়সা

6. 7 গ্রাম, 3 গ্রাম, 6 গ্রাম, 5 গ্রাম।

গড় নির্ণয় কর :—

7. 70 সেন্ট, 1 ডলার 56 সেন্ট, 1 ডলার 32 সেন্ট., 26 সেন্ট।

8. 42 কি. লি. 2 হে. লি., 29 কি. লি. 3 হে. লি., 32 কি. লি., 21 কি. লি. 5 হে. লি., 40 কি. লিটার।

9. 5 কি. মি. 381 মি., 159 হে. মি., 10 কি. মি. 57 ডে. মিটার।

10. $\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{2}$, $4\frac{3}{8}$, $\frac{2}{15}$ 11. $6\frac{1}{2}$ ঘণ্টা, $3\frac{1}{3}$ ঘণ্টা, 9 ঘণ্টা, $4\frac{1}{4}$ ঘণ্টা।

12. ·03, 2·07, 3·8, 4·2.

13. 9·7 বৎসর, 10 বৎসর, 5·8 বৎসর, 7·6 বৎসর, ·3 বৎসর।

14. 1 হইতে 21 পর্যন্ত অযুগ্ম সংখ্যাগুলির গড় নির্ণয় কর।

15. 1 হইতে 30 পর্যন্ত স্বাভাবিক সংখ্যাগুলির গড় নির্ণয় কর।

16. একটি ঘড়ি প্রথম দিন 4 মিনিট, দ্বিতীয় দিন 3 মিনিট এবং তৃতীয় দিন 6 মিনিট ফাস্ট হইল। ঘড়িটি গড়ে দিন কত ফাস্ট হইয়াছিল ?

17. রথের সময় প্রথম দিন 16789 জন লোক, দ্বিতীয় দিন 27122 জন এবং তৃতীয় দিন 30000 জন পুরী গেল। গড়ে দিন কয়জন পুরী গেল ?

18. এক ব্যক্তি দুর্ভিক্ষের সময় কোন গ্রামে প্রথম দিন 10 কুইন্টাল, দ্বিতীয় দিন 12 কুই., তৃতীয় দিন 8 কুই. 24 কি. গ্রাম, চতুর্থ দিন 9 কুই. 17 কি. গ্রা. এবং পঞ্চম দিন 13 কুই. 9 কি. গ্রাম চাউল বিতরণ করিলেন। তিনি গড়ে দিন কত চাউল দিয়াছিলেন ?

19. একটি বালক প্রথম ঘণ্টায় 1760 মিটার, দ্বিতীয় ঘণ্টায় 15 হে. মি., তৃতীয় ঘণ্টায় 165 ডে. মি. এবং চতুর্থ ঘণ্টায় 14 হে. মি. দৌড়াইল। সে গড়ে ঘণ্টায় কত দৌড়াইল ?

20. কোন এক বৎসর জুন হইতে সেপ্টেম্বর পর্যন্ত মাসে বৃষ্টির পরিমাণ ছিল যথাক্রমে 12·5, 27·04, 20·05 ও 6·29 ইঞ্চি। এই চারিমাসে গড়ে দৈনিক বৃষ্টির পরিমাণ কত ? [S. F. '59]

21. কোন বিদ্যালয়ে প্রথম দুইদিনে 500 জন, তারপর 3 দিন প্রত্যহ 200 জন এবং ষষ্ঠ দিনে 184 জন ছাত্র উপস্থিত ছিল। গড়ে প্রত্যহ কয়জন ছাত্র উপস্থিত ছিল ?

22. প্রতি কিলোগ্রাম 2 টাকা 50 প. দরে 4 কি. গ্রা., 2 টাকা 25 প. দরে 3 কি. গ্রা. এবং 1 টা. 75 প. দরে 2 কি. গ্রাম তৈল কিনিয়া একত্রে মিশান হইল। এখন গড়ে প্রতি কিলোগ্রামের মূল্য কত পড়িল ?

23. কোন গোয়ালা 18 পয়সা লিটার দরে 10 লিটার দুধ কিনিয়া তাহার সহিত 5 লিটার জল মিশাইল। এখন গড়ে 1 লিটার দুধের মূল্য কত হইল ?

24. এক ব্যক্তি প্রথম 4 দিন গড়ে 45 টাকা করিয়া এবং পরের দুই দিন গড়ে 36 টাকা করিয়া খরচ করিল। যদি তাহার প্রথম 7 দিনের খরচের গড় 40 টাকা হইয়া থাকে তবে সপ্তম দিনে সে কত টাকা খরচ করিয়াছিল ?

25. একটি বৃদ্ধ প্রথম দুই দিন 5 ঘণ্টা করিয়া, তারপর 3 দিন 6 ঘণ্টা করিয়া ঘুমাইলেন, কিন্তু ষষ্ঠ দিনে একটুও ঘুমাইলেন না। এই 6 দিনে গড়ে তিনি কতক্ষণ ঘুমাইয়াছিলেন ?

26. কোন সপ্তাহে গড়ে দৈনিক 0·25 সে. মি. বৃষ্টি হইয়াছিল। প্রথম 6 দিনে বৃষ্টিপাত সে. মি. হিসাবে এইরূপ :—রবিবার কিছুই না, সোম—0·40, মঙ্গল—0·02, বুধ—0·45, বৃহস্পতি—0·28, শুক্র—0·58 ; শনিবারে বৃষ্টিপাত কত ছিল ?

27. 4টি মন্দিরের উচ্চতা যথাক্রমে 170 মিটার, 18 ডে. মি., 1 হে. মি. 5 ডে. মি. এবং 121 মিটার হইলে গড়ে প্রতি মন্দিরের উচ্চতা কত ?

28. কোন মোটরগাড়ী প্রথম 12 মিনিটে 5 কিলো মিটার, দ্বিতীয় 12 মিনিটে 7 কি. মিটার এবং তৃতীয় 12 মিনিটে 6 কি. মিটার গেল। গাড়ীখানি গড়ে ঘণ্টায় কত কিলো মিটার গেল ?

29. কোন বিদ্যালয়ে প্রথম শ্রেণীর 41 জন ছাত্রের বয়সের গড় 6·25 বৎসর, দ্বিতীয় শ্রেণীর 36 জনের বয়সের গড় 7·31 বৎসর এবং তৃতীয় শ্রেণীর 25 জনের বয়সের গড় 8·93 বৎসর। ঐ বিদ্যালয়ের ছাত্রগণের বয়সের গড় কত ? [U. U. '51]

30. একটি বালক বাৎসরিক পরীক্ষায় ইংরাজীতে 200 নম্বরের মধ্যে 120, গণিতে 100 নম্বরের মধ্যে 70 এবং সংস্কৃতে 100 নম্বরের মধ্যে 30 নম্বর পাইয়াছে। ইতিহাসে 100 নম্বরের মধ্যে কত নম্বর পাইলে তাহার সকল বিষয়ে শতকরা গড়ে 59 নম্বর পাওয়া হইবে ?

31. 12 জন বালকের ওজনের গড় 25 কি. গ্রাম। তাহাদের 7 জনের ওজনের গড় 20 কি. গ্রাম। বাকি 5 জনের ওজনের গড় কত ?

32. 1936 সালের ফেব্রুয়ারী মাসে এক ব্যক্তি মোট 88 টাকা 16 পয়সা উপার্জন করিল। গড়ে সেই মাসে তাহার দৈনিক উপার্জন কত ?

33. কোন গ্রামে 1911 সনের লোকসংখ্যা ছিল 7503 এবং 1921 সনে লোকসংখ্যা হইল 7713. ঐ গ্রামে বৎসরে গড়ে লোকসংখ্যা কত বাড়িল ?

34. 8টি ফিতার দৈর্ঘ্যের গড় 1 ডে. মি. 3 মিটার। প্রথম 3টির দৈর্ঘ্যের গড় 2 ডে. মি. 3 মি. এবং তারপর 4টি ফিতার দৈর্ঘ্যের গড় 7 মিটার। অষ্টম ফিতার দৈর্ঘ্য কত ?

35. কোন বাগানে 10টি আম গাছ আছে। 4টি গাছে আমের সংখ্যা গড়ে 301, অপর 5টি গাছে গড়ে 328টি আম এবং অবশিষ্ট গাছটিতে পূর্বের 9টি গাছের গড় অপেক্ষা 10টি আম বেশী ছিল। ঐ গাছটিতে মোট কতগুলি আম ছিল ?

36. 12টি সংখ্যার গড় 13 ; প্রথম 5টির গড় 7 এবং তাহার পরের 6টির গড় 12 হইলে, অবশিষ্ট সংখ্যাটি কত ?

37. কোন শ্রেণীর 40 জন ছাত্রের বয়সের গড় 16 বৎসর। 17 বৎসর বয়স্ক একটি বালক চলিয়া গেল এবং একজন নূতন ছাত্র ভর্তি হইল। ইহাতে যদি তাহাদের বয়সের গড় 15·875 বৎসর হয়, তবে নূতন ছাত্রের বয়স কত ?

38. 10টি সংখ্যার গড় 1·015102 ; প্রথম 6টি সংখ্যার গড় 1·01267 এবং শেষ 5টি সংখ্যার গড় 1·01688 ; ষষ্ঠ সংখ্যাটি কত ? [U. P. '27]

39. কোন যুদ্ধে 13 দিনে যত সৈন্য নিহত হয় তাহার গড় 9000 ছিল। প্রথম 6 দিনে নিহত সৈন্য-সংখ্যার গড় 8000 এবং শেষ 6 দিনের গড় 11000 হইলে, সপ্তম দিনে কত সৈন্য নিহত হইয়াছিল ?

40. 1920 খ্রীষ্টাব্দে ভারতে লোকসংখ্যা ছিল 33 কোটি ; প্রতি বৎসর বৃদ্ধি পাইয়া 1936 খ্রীষ্টাব্দে লোকসংখ্যা হইল 35 কোটি। প্রতি বৎসর গড়ে লোকসংখ্যা কত বাড়িয়াছিল ?

41. 7 জন পুরুষ, 10 জন স্ত্রীলোক ও 1 জন বালক প্রত্যহ গড়ে 12 টাকা উপায় করে। যদি পুরুষদিগের দৈনিক উপার্জনের গড় 17 টাকা এবং স্ত্রীলোকদিগের দৈনিক উপার্জনের গড় 9 টাকা হয়, তবে বালকটি একদিনে কত টাকা উপার্জন করে ?

42. কোন দোকানদার প্রথম 3 বৎসর গড়ে 1500 টাকা লাভ করিল, তারপর দুই বৎসর যথাক্রমে 1200 টাকা এবং 1300 টাকা লাভ করিল।

এই 5 বৎসর তাহার গড়ে যত লাভ হইল, ষষ্ঠ বর্ষে তাহা অপেক্ষা 100 টাকা কম লাভ হইয়াছিল ? ঐ বৎসরে সে কত লাভ করিয়াছিল ?

43. কোন বিদ্যালয়ে সোম হইতে শনিবারের মধ্যে প্রথম 4 দিন উপস্থিত ছাত্রসংখ্যার গড় 280 এবং শেষ 3 দিনের উপস্থিত ছাত্রসংখ্যার গড় 300 ছিল। ঐ 6 দিনের উপস্থিত ছাত্রসংখ্যার গড় 290 হইলে, বৃহস্পতিবার কত ছাত্র উপস্থিত ছিল ?

44. এক ব্যক্তি 72 প. কিলোগ্রাম দরে 20 কি. গ্রা. লবণের সহিত 60 প. কিলোগ্রাম দরের 40 কি. গ্রা. লবণ মিশ্রিত করিল। ঐ মিশ্রিত লবণ গড়ে কত করিয়া বিক্রয় করিলে প্রতি কিলোগ্রামে তাহার 12 পয়সা লাভ হইবে ?

45. 5 জন বালকের বয়সের গড় 9 বৎসর। ঐ 5 জন বালক ও তাহাদের পিতার বয়সের গড় 16 বৎসর। পিতার বয়স কত ? [ছাত্র. 1933]

46. 20 জন মজুরের মধ্যে 12 জনের প্রত্যেকে মাসে 10 টাকা 15 প. করিয়া এবং অবশিষ্টের প্রত্যেকে মাসে 8 টাকা করিয়া উপার্জন করিল। তাহাদের প্রত্যেকের গড়ে মাসিক উপার্জন কত ?

47. রামের বয়স যখন 4 বৎসর 7 মাস তখন শ্যামের জন্ম হয়। শ্যামের বয়স যখন 3 বৎসর 4 মাস তখন হরি জন্মায় ; হরির বয়স যখন 5 বৎসর 2 মাস তখন তাহাদের বয়সের গড় কত ?

48. কোন অন্নসত্রে 1932 খ্রীষ্টাব্দের ফেব্রুয়ারী ও মার্চ মাসে যথাক্রমে 305 কুইন্টাল 9 কি. গ্রাম এবং 371 কুই. 11 কি. গ্রা. চাউল খরচ হইল। ঐ দুই মাসে দৈনিক গড়ে কত চাউল খরচ হইয়াছিল ?

49. 11টি গরুর মধ্যে 25 টাকা দামের 1টি গরুর বদলে 1টি ঘোড়া কেনা হইল। ইহাতে যদি উহাদের মূল্য গড়ে 5 টাকা বাড়ে, তবে ঘোড়াটির মূল্য কত ?

50. 7টি ছাগল ও 7টি ভেড়ার মূল্যের গড় 6 টাকা। 1টি ভেড়ার মূল্য 1টি ছাগলের মূল্যের দ্বিগুণ হইলে, প্রত্যেকটি ভেড়া ও ছাগলের মূল্য কত ?

51. কোন শ্রেণীতে 15 জন বালক আছে। তাহাদের বয়সের গড় 10 বৎসর। যদি 14, 15 ও 19 বৎসর বয়স্ক 3 জন বালক ঐ শ্রেণীতে ভর্তি হয়, তবে তাহাদের বয়সের গড় কত হইবে ? [বৃত্তি 1934]

52. A, B ও C-এর মাসিক বেতনের গড় 40 টাকা। B, C ও D-এর ঐ বেতনের গড় 50 টাকা এবং D-এর বেতন 60 টাকা। A-এর বেতন কত ?

53. কোন শ্রেণীর 30 জন ছাত্রের বয়সের গড় 14·4 বৎসর। 10 জন নূতন ছাত্র ঐ শ্রেণীতে ভর্তি হওয়ায় তাহাদের বয়সের গড় 13·9 বৎসর হইল। নূতন ছাত্রদের বয়সের গড় নির্ণয় কর। [S. F. '67]

54. A ও B-এর মাসিক আয় গড়ে 70 টাকা, B ও C-এর 60 টাকা এবং A ও C-এর 65 টাকা। প্রত্যেকের আয় কত ?

55. একটি শ্রেণীর 27 জন বালকের বয়সের গড় 16 বৎসর। তাহাদের শিক্ষককে লইলে তাহাদের বয়সের গড় $\frac{1}{2}$ বৎসর বাড়ে। শিক্ষকের বয়স কত ?

56. কোন কারখানায় নিযুক্ত ব্যক্তিগণের বেতনের গড় 60 টাকা। উহাদের মধ্যে 12 জন অফিসারের বেতনের গড় 400 টাকা এবং অবশিষ্ট ব্যক্তিগণের বেতনের গড় 56 টাকা। ঐ কারখানায় মোট কত লোক চাকরি করে ? [I. P. S. '40]

57. বেদী ও প্রসন্ন প্রত্যেকে 28 রাণে 8 উইকেট লইয়াছিল। পরে বেদী 35 রাণে একটি ও প্রসন্ন 56 রাণে 4 উইকেট লইল। উইকেট লওয়ার গড় কাহার অপেক্ষাকৃত ভাল ? [*cf*, B. C. S.]

58. কোন ক্রিকেট খেলোয়াড় 12 বার খেলিয়া গড়ে 34টি করিয়া রাণ করিয়াছে, তাহাকে আর একবার খেলিতে হইবে। সেবারে আর কত রাণ করিলে, তাহার রাণের গড় 40 হইবে ?

59. গাভাসকার সপ্তদশম বারের ক্রিকেট খেলায় 85 রাণ করায় তাহার রাণের গড় পূর্বের 16 বারের খেলায় রাণের গড় অপেক্ষা 3 বাড়িল। 17 বার খেলিয়া তাহার রাণের গড় কত হইল ?

60. P ও Q স্থান দুইটির মধ্যে দূরত্ব 80 কি. মিটার। এক ব্যক্তি মোটর গাড়ীতে ঘণ্টায় 20 কি. মি. বেগে P হইতে Q-এ গিয়া ঘণ্টায় 16 কি. মিটার বেগে Q হইতে P-তে ফিরিল। সমগ্র ভ্রমণে তাহার গড় গতিবেগ কত ? [G. U. '72]

61. নিম্নের সংখ্যাগুলির গড় নির্ণয় কর :—
18, 22, 20, 19, 24, 26, 18, 20, 19, 25, 24, 20, 24, 26, 25, 20, 25, 26, 19, 20, 25, 19, 25, 24.

62. নিম্নের তালিকায় 5টি শ্রেণীর ছাত্রদের ওজন দেওয়া হইল। উহা হইতে তাহাদের ওজনের গড় নির্ণয় কর।

ওজন (কিলোগ্রাম)	35	38·25	39	40	41·5
ছাত্রসংখ্যা	18	24	16	22	20

63. নিম্নের তালিকায় 34 জন ছাত্র এক বিষয়ের পরীক্ষায় যে নম্বর পাইয়াছে তাহা দেওয়া হইল। ঐ নম্বরের গড় নির্ণয় কর : [S. F. '65]

ছাত্রসংখ্যা	4	2	3	5	7	5	4	3	1
নম্বর	50	55	62	68	73	75	81	85	91

64. নিম্নের তালিকায় 30 জন ছাত্র অঙ্ক পরীক্ষায় যে নম্বর পাইয়াছে তাহা দেওয়া হইল। ঐ নম্বরের গড় নির্ণয় কর : [S. F. '69]

নম্বর	64	70	80	90
ছাত্রসংখ্যা	5	10	12	3

65. নিম্নলিখিত তালিকায় 52 জন ছাত্রের উচ্চতা দেওয়া হইল। ঐ উচ্চতার গড় নির্ণয় কর : [S. F. '66

ছাত্রসংখ্যা	4	7	10	15	8	5	3
উচ্চতা (ইঞ্চিতে)	30	33	35	40	43	45	48

66. নিম্নের তালিকায় 45 জন ছাত্র কোন এক বিষয়ে যত নম্বর পাইয়াছে তাহা দেওয়া হইল। ঐ নম্বরের গড় নির্ণয় কর : [S. F. '66 (C)

ছাত্রসংখ্যা	4	3	5	7	12	5	4	3	2
নম্বর	45	52	56	65	70	72	74	75	80

67. নিম্নে 100 জন ছাত্রের ওজনের তালিকা দেওয়া হইল ; ঐ ওজনের গড় নির্ণয় কর : [S. F. '67]

ছাত্রসংখ্যা	15	25	40	15	5
ওজন (পাউণ্ডে)	105	116	127	138	149

তৃতীয় অধ্যায়

দশমিক ভগ্নাংশের বর্গমূল

§ 9. পূর্ণসংখ্যার ন্যায় দশমিক ভগ্নাংশও একই দশগুণোত্তর প্রণালীতে লেখা হয়। সুতরাং দশমিকের বর্গমূল নির্ণয়ের প্রণালী পূর্ণসংখ্যার বর্গমূল নির্ণয়-প্রণালীর অনুরূপ। (i) প্রথমে দশমিক বিন্দুর বামে এককের অঙ্কে চিহ্ন দিয়া ডানদিকে ও বামদিকে একটি অন্তর অঙ্কগুলিতে চিহ্ন দিতে হয়। (ii) যদি প্রদত্ত দশমিক ভগ্নাংশে কোন অখণ্ড অংশ না থাকে, তবে উহার দ্বিতীয় দশমিক অঙ্কের উপর প্রথম চিহ্ন দিবে। (iii) প্রদত্ত দশমিক ভগ্নাংশে যদি বিজোড় সংখ্যক দশমিক অঙ্ক থাকে, তবে সবশেষে একটি শূন্য বসাইয়া অংশগুলি সম্পূর্ণ করিবে। (iv) অখণ্ড অংশ শেষ হইয়া যখন প্রথম দশমিকের চিহ্নিত অংশ নামান হইবে, তখন বর্গমূলেও দশমিক বিন্দু বসিবে।

উদাহরণ। 20·25 এবং ·000324-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

```
    20'·25'( 4·5                  ·000324 ( ·018
    16                                1
85 )425                      28 )    224
    425                              224
```

∴ বর্গমূল = 4·5.   ∴ বর্গমূল = ·018.

[**দ্রষ্টব্য ঃ** প্রথমটিতে এককের স্থানের শূন্যের উপর প্রথম চিহ্ন পড়িল। দ্বিতীয়টিতে এককের স্থানে কোন অঙ্ক নাই। ঐ স্থানে 0 আছে ধরিয়া কার্য করা হইল। এখানে প্রথম অংশ '00',

∴ বর্গমূলে দশমিকের পর 1টি 0 বসান হইল।]

§ 10. সামান্য ভগ্নাংশের বর্গমূল।

(1) ভগ্নাংশের বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইলে উহার লব ও হরের বর্গমূল পৃথক্‌ভাবে নির্ণয় করিয়া উহাদিগকে লব ও হররূপে বসাইবে। মিশ্র সংখ্যাকে প্রথমে অপ্রকৃত ভগ্নাংশে পরিণত করিবে। (2) যদি ভগ্নাংশটির হরটি কিংবা লব ও হর উভয়ই পূর্ণবর্গ না হয়, তবে হয় (*i*) ভগ্নাংশটিকে দশমিক ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া তাহার বর্গমূল নির্ণয় করিবে, অথবা (ii) প্রথমে হরটিকে লঘিষ্ঠ কোন অখণ্ড সংখ্যা-দ্বারা গুণ করিয়া তাহাকে পূর্ণবর্গ সংখ্যা করিবে এবং লবটিকে ঐ সংখ্যাদ্বারা গুণ করিবে। তারপর ঐ লব ও হরের বর্গমূল নির্ণয় করিবে।

উদা. 1. (A) $\sqrt{\dfrac{9}{16}}=\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\dfrac{3}{4}$;

(B) $\sqrt{6\frac{1}{4}}=\sqrt{\dfrac{25}{4}}=\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}}=\dfrac{5}{2}=2\frac{1}{2}$.

§ 11. নির্দিষ্ট দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত বর্গমূল নির্ণয়।

উদা. 1. তিন দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত 2-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$2 = 2{\cdot}0000\cdots$

```
     | 2'·00'00'··· (1·414···
     | 1
     |-----
 24  | 100
     |  96
     |------
 281 |  400
     |  281
     |--------
2824 |  11900
     |  11296
     |--------
     |    604
```

∴ নির্ণেয় বর্গমূল = 1·414.

উদা. 2. দুই দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত $\frac{5}{7}$এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$\sqrt{\frac{5}{7}}=\sqrt{\frac{5\times7}{7\times7}}=\frac{\sqrt{35}}{7}=\frac{5{\cdot}91}{7}=\cdot84 \text{ (উত্তর)}$$

```
     | 35'      ( 5·91
     | 25
 109 | 1000
     |  981
1181 |  1900
     |  1181
     |   719
```

[এখানে লব ও হর কোনটিই পূর্ণবর্গ নহে। এরূপ স্থলে হরকে কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে হরটি পূর্ণবর্গ হইবে তাহা দেখিতে হয়। এখানে 7কে 7 দিয়া গুণ করিলে তবে পূর্ণবর্গ সংখ্যা হয়। সুতরাং লব ও হর উভয়কেই 7 দিয়া গুণ করা হইল। ইহাতে প্রদত্ত ভগ্নাংশের মান বদলাইবে না। এখন $\frac{35}{49}$-এর হরের বর্গমূল 7 এবং লব 35-এর 2 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত বর্গমূল 5·91 হইল ;

সুতরাং নির্ণেয় বর্গমূল $=\frac{5{\cdot}91}{7}=\cdot84$]

উদা. 3. 2·031-এর বর্গমূল 3 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত নির্ণয় কর।

$2{\cdot}031=2{\cdot}031000\ldots$

```
     | 2'·03'10'··· ( 1·425
     | 1
  24 | 103
     |  96
 282 |  710
     |  564
2845 |  14600
     |  14225
     |    375
```

∴ নির্ণেয় বর্গমূল = 1·425.

উদা. 4. $\sqrt{1-(\cdot02)^2}$-এর মান 4 দশমিকাঙ্ক পর্যন্ত কত হয় ?

$$\sqrt{1-(\cdot02)^2}=\sqrt{1-\cdot0004}=\sqrt{\cdot9996}$$

```
      | ·99'96'00' … ( ·9997…
      |  81
  189 |  1896
      |  1701
 1989 |   19500
      |   17901
19987 |    159900
      |    139909
      |     19991
```

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\cdot9997$.

উদা. 5. দুইটি সংখ্যার গুণফল $15\frac{3}{16}$ এবং একটি সংখ্যা অন্যটির 3 গুণ। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

ছোট সংখ্যা $\times$ বড় সংখ্যা $=15\frac{3}{16}=\frac{243}{16}$,

সুতরাং ছোট সংখ্যা $\times$ 3 গুণ ছোট সংখ্যা $=\frac{243}{16}$,

অর্থাৎ $3\times$(ছোট সংখ্যা $)^2=\frac{243}{16}$,

$\therefore$ (ছোট সংখ্যা $)^2=\frac{243}{16\times3}=\frac{81}{16}$

$\therefore$ ছোট সংখ্যাটি $=\sqrt{\frac{81}{16}}=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$,

$\therefore$ বড় সংখ্যাটি $=\frac{9}{4}\times3=\frac{27}{4}=6\frac{3}{4}$.

অতএব, সংখ্যা দুইটি $=2\frac{1}{4}$ ও $6\frac{3}{4}$.

[**বীজগণিতীয় প্রণালী**]

মনে কর, একটি সংখ্যা x এবং অন্য সংখ্যাটি $3x$.

অতএব, $3x\times x=15\frac{3}{16}=\frac{243}{16}$. বা, $3x^2=\frac{243}{16}$,

বা, $x^2=\frac{243}{16\times3}=\frac{81}{16}$, $x=\sqrt{\frac{81}{16}}=\frac{9}{4}$.

$\therefore$ একটি সংখ্যা $=\frac{9}{4}$ এবং অন্য সংখ্যাটি $=\frac{9}{4}\times3=\frac{27}{4}$.

উদা. 6. 24·86 মিটার দীর্ঘ একটি মই কোন প্রাচীর গাত্রে লাগান আছে। উহার এক প্রান্ত প্রাচীর হইতে 3·3 মিটার দূরে থাকিলে অপর প্রান্তটি প্রাচীরের কত উঁচুতে আছে ?

এখানে চিত্র আঁকিয়া দেখা যায় যে, মইটির দৈর্ঘ্য (24·86 মি.) যেন একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ এবং 3·3 মিটার যেন ঐ ত্রিভুজের একটি বাহু (ভূমি), অপর বাহুটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে। জ্যামিতি হইতে জানা যায় যে সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের বর্গ = অপর দুই বাহুর বর্গের সমষ্টি।

মনে কর, প্রাচীর গাত্রে h মিটার উচ্চে মইটির অপর প্রান্ত আছে।

$\therefore$ h মিটার হইল একটি বাহু।

অতএব, $h^2 = (24{\cdot}86)^2 - (3{\cdot}3)^2 = 618{\cdot}0196 - 10{\cdot}89$

$= 607{\cdot}1296, \quad \therefore \quad h = \sqrt{607{\cdot}1296} = 24{\cdot}64.$

অতএব, নির্ণেয় উচ্চতা = 24·64 মি. = 24 মি. 64 সে. মিটার।

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে গুণগুলি, বর্গ ও বর্গমূল করিয়া দেখাইবে।]

উদা. 7. এক ব্যক্তি কয়েক দিনে 1127·6164 টাকা ব্যয় করিয়াছে। সে যতদিনে উহা ব্যয় করিয়াছে প্রত্যহ তত টাকা ব্যয় করিয়া থাকিলে, প্রতিদিন কত ব্যয় করিয়াছে ?

এখানে বুঝা গেল যে, দিনের সংখ্যা যত, প্রত্যহ ব্যয়ের টাকার সংখ্যাও তত। অতএব, দুইটি সমান সংখ্যার গুণফল = 1127·6164.

সুতরাং (ঐ সংখ্যা)^2 = 1127·6164,

$\therefore$ ঐ সংখ্যা = $\sqrt{1127{\cdot}6164} = 33{\cdot}58$,

$\therefore$ সে প্রত্যহ 33·58 টা. অর্থাৎ 33 টা. 58 পয়সা ব্যয় করিয়াছে।

```
3 ) 11'27'·61'64' ( 33·58
     9
   ----
63 ) 227
     189
    -----
665 ) 3861
      3325
     ------
6708 ) 53664
       53664
```

উদা. 8. দুইটি বর্গক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 2·4 ও 1·8 মিটার। উভয় ক্ষেত্রের সমান আয়তনের বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য কত ?

প্রথম বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 2·4 × 2·4 বর্গ মি. = 5·76 বর্গ মি.,

এবং দ্বিতীয় „ „ = 1·8 × 1·8 বর্গ মি. = 3·24 বর্গ মি।

∴ উভয় বর্গক্ষেত্রের মোট আয়তন $=(5{\cdot}76+3{\cdot}24)$ বর্গ মি.
$=9$ বর্গ মিটার।

∴ তৃতীয় বর্গক্ষেত্রটির আয়তন $=9$ বর্গ মিটার।

∴ উহার নির্ণেয় বাহুর দৈর্ঘ্য $=\sqrt{9}$ মিটার $=3$ মিটার।

প্রশ্নমালা 8

বর্গমূল নির্ণয় কর :—

1. 15·21   2. ·000361   3. 1·0201   4. ·000576
5. 341·1409 [বৃত্তি. 1933]   6. ·00105625 [বৃত্তি. 1929]
7. ·00822649 [বৃত্তি. 1931]   8. 170·485249 [ক. প্র. 1915]
9. 29·192409 [ক. প্র. 1913]
10. 2919·46783041 [ক. প্র. 1915]
11. $\frac{25}{121}$ 12. $\frac{784}{225}$ 13. $\frac{64}{169}$ 14. $\frac{1024}{5625}$
15. $12\frac{1}{4}$ 16. $6\frac{43}{81}$ 17. $6\frac{145}{256}$ 18. $\frac{2\frac{1}{4}}{9}$
19. $\frac{6}{8\frac{1}{6}}$ 20. $\frac{1{\cdot}21}{11\frac{1}{9}}$ 21. $\frac{32{\cdot}4}{62{\cdot}5}$
22. (1). $9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\frac{1}{6}}}$ [এ. প্র. 1898] ;   (2). $\frac{1000{\cdot}20001}{1000}$
23. কোন্ সংখ্যাকে সেই সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে $109\frac{628}{729}$ হয় ? [পা. প্র. 1925]

তিন দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত বর্গমূল নির্ণয় কর :—

24. 18, $\frac{2}{9}$ 25. $\frac{3}{4}$ 26. $\frac{2}{7}$ 27. $\frac{1}{3}$
28. ·4 [ঢা. বো. 1940]   29. 3·6   30. ·021
31. 1   32. $\frac{7}{30}$ 33. $1-({\cdot}021)^2$ 34. $\frac{1}{33}$
35. 7 দশমিক স্থান পর্যন্ত 2-এর বর্গমূল কত ? [ঢা. বো. 1933]
36. 4 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত $\frac{7}{22}$এর বর্গমূল কত ?
37. $1-({\cdot}00135)^2$এর 4 দশমিক স্থান পর্যন্ত বর্গমূল নির্ণয় কর। [ক. প্র. 1926]

মান নির্ণয় কর (তিন দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত) :—

38. $\sqrt{3\frac{33}{64}} \div \sqrt{9\frac{1}{7}} \times 2\sqrt{21\frac{7}{9}}$

39. $\sqrt{32} - \sqrt{128} + \sqrt{50}$.

40. 153·140025এর সহিত কোন্ লঘিষ্ঠ সংখ্যা যোগ করিলে যোগফলটি পূর্ণবর্গ হইবে ?

41. দুটি সংখ্যার গুণফল $29\frac{31}{49}$ এবং একটি সংখ্যা অন্যটির 3 গুণ। সংখ্যা দুইটি কত ?

42. দুইটি সংখ্যার গুণফল $\frac{14}{15}$ ও ভাগফল $\frac{35}{24}$ হইলে সংখ্যা দুইটি কত ?

43. কোন্ সংখ্যাকে সেই সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে $233\frac{32}{49}$ হয় ?

44. এমন তিনটি সংখ্যা নির্ণয় কর যেন প্রথম ও দ্বিতীয় সংখ্যার গুণফল $\frac{15}{28}$, দ্বিতীয় ও তৃতীয় সংখ্যার গুণফল $\frac{30}{49}$ এবং তৃতীয় ও প্রথম সংখ্যার গুণফল $\frac{9}{14}$ হয়।

45. ABCD আয়তক্ষেত্রের AB = 11 মিটার ও BC = 8·25 মিটার, AC-র দৈর্ঘ্য কত মিটার ?

46. এক ব্যক্তি ভ্রমণকালে 86·49 টাকা ব্যয় করেন। তিনি যত কিলো মিটার ভ্রমণ করিয়াছেন, তত টাকা করিয়া যদি প্রতি কিলোমিটারে ব্যয় হইয়া থাকে, তবে তিনি কত কিলো মিটার ভ্রমণ করিয়াছেন ?

47. কোন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 12·32 সে. মিটার এবং প্রস্থ 6·93 সে. মিটার ; উহার সমান পরিমাণ বর্গক্ষেত্রের বাহুর মাপ কত ?

48. যে আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 9·24 সে. মি. ও প্রস্থ 3·85 সে. মিটার, তাহার কর্ণের দৈর্ঘ্য কত ?

49. যে অয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য প্রস্থের দ্বিগুণ এবং ক্ষেত্রফল 30479·805 বর্গ মিটার, তাহার দৈর্ঘ্য কত ?

50. 7·4187 − 6·8 ÷ 8·5 − 2·03 × 1·17এর বর্গমূল কত ?

51. তিনটি সংখ্যার মধ্যে প্রথম ও দ্বিতীয়ের গুণফল 3, প্রথম ও তৃতীয়ের গুণফল $4\frac{3}{8}$ এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয়ের গুণফল $8\frac{2}{5}$; সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

52. তিনটি সংখ্যার মধ্যে প্রথম ও দ্বিতীয়ের গুণফল 3·12, দ্বিতীয় ও তৃতীয়ের গুণফল 8·88 এবং প্রথম ও তৃতীয়ের গুণফল 4·81 হইলে, সংখ্যা তিনটি কত ?

53. একটি বর্গক্ষেত্রের কর্ণ ·9 হেক্টো মিটার। উহার ক্ষেত্রফল বর্গমিটারে নির্ণয় কর।

54. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য প্রস্থের দেড়গুণ এবং মেঝের ক্ষেত্রফল $98\frac{37}{54}$ বর্গ মিটার। উহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

55. একটি বর্গাকার বাগানের ক্ষেত্রফল 331·24 বর্গ মিটার। উহাকে তারের বেড়া দিয়া ঘিরিতে কত মিটার বেড়া লাগিবে ?

56. একটি বর্গাকার খেলার মাঠের ক্ষেত্রফল 222·01 বর্গ মিটার। প্রতি মিনিটে $7\frac{9}{20}$ মিটার করিয়া চলিলে মাঠটি একবার প্রদক্ষিণ করিতে কত সময় লাগিবে ?

57. একটি প্রাচীরগাত্রে 14·64 মিটার দীর্ঘ একটি মই সোজা দাঁড় করান আছে। উহার নিম্ন প্রান্ত কতটা টানিয়া লইলে অপর প্রান্তটি প্রাচীরের গাত্রে 14·4 মিটার উচ্চে থাকিবে ?

58. দুইটি বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা যথাক্রমে ·32 ও ·6 হেক্টো মিটার। উহাদের আয়তনের সমষ্টির সমান আয়তনের অন্য একটি বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা নির্ণয় কর।

59. 153·140024-এর সহিত কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যোগ করিলে যোগফলটি একটি পূর্ণ বর্গসংখ্যা হইবে ?

60. ·000328 হইতে কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা বিয়োগ করিলে বিয়োগফলটি একটি পূর্ণ বর্গসংখ্যা হইবে ?

চতুর্থ অধ্যায়

ঐকিক নিয়মে সময় ও দূরত্ব

§ **12. বেগ :** কোন ব্যক্তি বা বস্তু কোন একক সময়ে (সাধারণতঃ 1 ঘণ্টায়) যে পথ অতিক্রম করে তাহার দৈর্ঘ্যকে উহার **বেগ** বলে।

একখানি গাড়ী যদি ঘণ্টায় 20 কিলো মিটার বেগে যায়, তবে 3 ঘণ্টায় উহা 20 কি. মি. × 3 বা 60 কি. মিটার পথ যাইবে। এই বেগকে **সমবেগ** অর্থাৎ সমস্তক্ষণ একই বেগে যাইতেছে ধরা হইবে।

অতএব, **দূরত্ব = বেগ × সময়,**

∴ **বেগ = দূরত্ব ÷ সময়,**

∴ **সময় = দূরত্ব ÷ বেগ।**

তোমরা ঐকিক নিয়ম পূর্বেই শিখিয়াছ। এখন সময় ও দূরত্ব-সংক্রান্ত প্রশ্নের ঐকিক নিয়মে সমাধান প্রণালী শিখিতে হইবে।

উদা. 1. তুমি সাইকেলে ঘণ্টায় 8 কিলোমিটার বেগে যাইতে পার ; 50 কি. মিটার যাইতে তোমার কত সময় লাগিবে ?

দূরত্ব সময়

তুমি 8 কি. মিটার যাও 1 ঘণ্টায়

∴ 1 কি. মি. যাও $\frac{1}{8}$ ঘণ্টায়।

∴ 50 কি. মি. যাইবে $\frac{1}{8} \times 50$ বা $6\frac{1}{4}$ ঘণ্টায়।

∴ নির্ণেয় সময় = 6 ঘণ্টা 15 মিনিট।

উদা. 2. একটি গাড়ী ঘণ্টায় $7\frac{1}{2}$ কি. মিটার বেগে যায়। উহা সকাল 10টা 15 মিনিট হইতে বিকালে 5টা 45 মিনিট পর্যন্ত সময়ে কতদূর যাইবে ?

সকাল 10টা 15 মিনিট হইতে বিকাল 5টা 45 মিনিট পর্যন্ত সময় $= 7\frac{1}{2}$ ঘণ্টা।

গাড়ীটি 1 ঘণ্টায় যায় $7\frac{1}{2}$ কি. মি.

$\therefore$ „ $7\frac{1}{2}$ „ $7\frac{1}{2} \times 7\frac{1}{2}$ কি. মি. $= \frac{225}{4}$ বা $56\frac{1}{4}$ কি. মি.।

$\therefore$ গাড়ীটি ঐ সময়ে যাইবে $56\frac{1}{4}$ কিলো মিটার।

উদা. 3. কোন নির্দিষ্ট সময়ে এক ব্যক্তিকে কোন স্থানে পৌঁছাইতে হইবে। সে যদি ঘণ্টায় 4 কি. মিটার করিয়া যায় তবে তাহার 5 মিনিট বিলম্ব হয়, কিন্তু ঘণ্টায় 5 কি. মিটার বেগে যাইলে নির্দিষ্ট সময়ের 10 মিনিট আগে পৌঁছায়। ঐ স্থানটির দূরত্ব কত?

ঘণ্টায় 4 কি. মি. বেগে 1 কি. মি. যাইতে সময় লাগে $\frac{1}{4}$ ঘণ্টা বা 15 মিনিট

এবং ঘণ্টায় 5 কি. মি. বেগে 1 কি. মি. যাইতে সময় লাগে $\frac{1}{5}$ ঘণ্টা বা 12 মিনিট।

অতএব, 5 কি. মি. বেগে গেলে প্রতি কি.মি. যাইতে $(15-12)$ বা 3 মিনিট করিয়া কম সময় লাগে।

প্রশ্নে দেখা যায় যে, প্রথম বেগে গেলে 5 মিনিট বিলম্ব হয় এবং দ্বিতীয় বেগে গেলে ঐ বিলম্ব ত হইবেই না বরং 10 মিনিট আগে পৌঁছায়, সুতরাং প্রথমবার অপেক্ষা দ্বিতীয়বারে মোট $(5+10)$ বা 15 মিনিট কম সময় লাগে।

এক্ষণে, 3 মিনিট কম সময় লাগে 1 কিলো মিটারে,

$\therefore$ 1 „ „ „ „ $\frac{1}{3}$ „ „

$\therefore$ 15 „ „ „ „ $\frac{1}{3} \times 15$ বা 5 কিলো মিটারে

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $= 5$ কিলোমিটার।

উদা. 4. এক ব্যক্তি ঘোড়ায় চড়িয়া মিনিটে 352 মিটার পথ যায় এবং 10 কিলোমিটার 560 মিটার অন্তর ঘোড়া বদলাইবার জন্য 6 মিনিট করিয়া থামে। 190 কি. মিটার 80 মিটার পথ যাইতে তাহার কত সময় লাগিবে ?

190 কি. মি. 80 মি. = 190080 মিটার ;

10 কি. মি. 560 মি. = 10560 মিটার।

লোকটি 1 মিনিটে 352 মিটার যায়,

∴ 190080 মি. যাইতে সময় লাগে $\frac{190080}{352}$ মিনিট = 540 মিনিট।

আবার, প্রতি 10560 মিটার যাইবার পর ঘোড়া বদলাইতে হয়। 190080 মিটারের মধ্যে 10560 মিটার 18 বার আছে, সুতরাং 18 বার ঘোড়া বদলাইবার কথা, কিন্তু শেষবারে ঠিক গন্তব্যস্থানে পৌঁছায় বলিয়া সেবারে ঘোড়া বদলাইতে হইবে না। সেজন্য শেষবারের থামাটি এস্থলে ধরিতে হইবে না। অতএব, 17 বার ঘোড়া বদলাইতে হইবে এবং তাহার জন্য সময় লাগিবে (6 মিনিট × 17) বা 102 মিনিট।

∴ মোট সময় লাগিল (540 + 102) মিনিট বা 10 ঘণ্টা 42 মিনিট।

উদা. 5. একখানি গাড়ী তাহার স্বাভাবিক বেগের $\frac{5}{8}$ বেগে চলিয়া গন্তব্যস্থানে 1 ঘণ্টা 15 মিনিট বিলম্বে পৌঁছিল। স্বাভাবিক বেগে গেলে কত সময় লাগিত ?

[**দ্রষ্টব্য :** স্বাভাবিক বেগে গেলে যে সময় লাগে, তাহার অর্ধেক বেগে গেলে সময় লাগিবে দ্বিগুণ ; $\frac{1}{3}$ বেগে গেলে সময় লাগে $\frac{3}{1}$ গুণ বা তিন গুণ ; সুতরাং $\frac{5}{8}$ বেগে গেলে সময় লাগিবে $\frac{8}{5}$ গুণ, ইত্যাদি।]

স্বাভাবিক পূর্ণবেগে গেলে যে সময় লাগে, তাহার $\frac{5}{8}$ বেগে গেলে সময় লাগিবে পূর্ণ সময়ের $\frac{8}{5}$ গুণ বা $1\frac{3}{5}$ গুণ। পূর্ব সময়ের $1\frac{8}{5}$ গুণ অর্থাৎ পূর্ব সময় + ঐ সময়ের $\frac{3}{5}$ অংশ ; সুতরাং নির্ণেয় সময়ের $\frac{3}{5}$ অংশ বেশী সময় লাগে বা বিলম্ব হয়। এখানে বলা আছে **1** ঘণ্টা **15** মিনিট বিলম্ব হয়।

∴ নির্ণেয় সময়ের $\frac{3}{5}$ অংশ = **1** ঘণ্টা **15** মিনিট = **75** মিনিট,

∴ নির্ণেয় সময় = $\frac{75 \text{ মি.} \times 5}{3}$ = **125** মিনিট = **2** ঘণ্টা **5** মি.।

§ 13. আপেক্ষিক বেগ :—

দুইটি গতিশীল বস্তু পরস্পরের দিকে অগ্রসর হইতে পারে বা পরস্পর হইতে দূরে সরিয়া যাইতে পারে। যে বেগে উহারা পরস্পর সম্মুখীন হয় বা দূরে সরিয়া যায়, সেই গতিবেগকে **আপেক্ষিক গতিবেগ** (Relative velocity বা motion) বলে এবং উহাদের মধ্যের ব্যবধান বা দূরত্বকে আপেক্ষিক দূরত্ব বলে।

(1) যখন দুই স্থান হইতে দুই বস্তু পরস্পরের অভিমুখে (অর্থাৎ পরস্পর বিপরীত দিকে) অগ্রসর হইতে থাকে, তখন উহাদের **আপেক্ষিক গতিবেগ** হইবে উহাদের **প্রকৃত গতিবেগের সমষ্টি**।

ঐ সমষ্টির সমান দূরত্ব প্রতি ঘণ্টায় পরস্পরের মধ্যে ব্যবধান বা দূরত্ব কমিয়া আসিবে। সুতরাং যখন এইভাবে সমস্ত ব্যবধানটুকু কমিয়া যাইবে, তখন উহারা **একই স্থানে মিলিত হইবে**।

(2) যখন দুই বস্তু একই অভিমুখে বা একই দিকে চলিতে থাকে, তখন তাহাদের **আপেক্ষিক গতিবেগ** হইবে তাহাদের **প্রকৃত গতিবেগের অন্তর**।

ঐরূপ গতিশীল দুই বস্তু একই দিকে চলিলে উভয়ের গতিবেগের অন্তর যে দূরত্ব, 1 ঘণ্টায় একটি অন্যটি অপেক্ষা সেই পরিমাণ দূরত্ব

বেশী যাইবে, অর্থাৎ প্রতি ঘণ্টায় উভয়ের ঐ পরিমাণ ছাড়াছাড়ি হইবে।

[দ্রষ্টব্য : (i) একই স্থান হইতে দুই ব্যক্তি যদি পরস্পর বিপরীত দিকে যথাক্রমে ঘণ্টায় 6 ও 4 কি. মিটার বেগে যায়, তবে 1 ঘণ্টায় উভয়ের মধ্যে দূরত্ব হইবে $(6+4)$ বা 10 কি. মিটার, 2 ঘণ্টায় ব্যবধান হইবে (10 কি. মি. $\times 2$) বা 20 কি. মিটার, ইত্যাদি।

(ii) যদি উহারা ঐ বেগে একই স্থান হইতে একই দিকে যায়, তবে 1 ঘণ্টায় উভয়ের মধ্যে দূরত্ব বা ব্যবধান হইবে $(6-4)$ বা 2 কিলোমিটার, 3 ঘণ্টায় ব্যবধান হইবে (2 কি. মি. $\times 3$) বা 6 কি. মিটার, ইত্যাদি।]

(3) A ও B এই দুই ব্যক্তির মধ্যে দূরত্ব যদি 40 কি. মিটার হয় এবং ঘণ্টায় A 5 কি. মি. ও B 3 কি. মি. বেগে পরস্পরের দিকে অগ্রসর হয়, তাহা হইলে উভয়ে মিলিয়া (অর্থাৎ আপেক্ষিক বেগে) যখন সমস্ত পথটুকু যাইবে তখন তাহাদের দেখা হইবে অর্থাৎ তাহারা মিলিত হইবে।

$\therefore$ $(40 \div 8)$ বা 5 ঘণ্টা পরে উভয়ে মিলিত হইবে।

(4) A ঘণ্টায় 10 কি. মি. এবং B ঘণ্টায় 6 কি. মিটার যায় এবং উভয়ে যদি একই স্থান হইতে একই দিকে রওনা হয়, তবে প্রতি ঘণ্টায় B অপেক্ষা A $(10-6)$ বা 4 কি. মি. করিয়া বেশী যাইবে অর্থাৎ প্রতি ঘণ্টায় উভয়ের মধ্যে দূরত্ব 4 কি. মিটার করিয়া বাড়িতে থাকিবে।

A যদি B-এর 20 কি. মিটার পিছনে থাকিয়া চলিতে আরম্ভ করে, তবে প্রতি ঘণ্টায় উভয়ের মধ্যে ব্যবধান 4 কি. মি. করিয়া

কমিতে থাকিবে। সুতরাং $(20 \div 4)$ বা 5 ঘণ্টা পরে উভয়ে মিলিত হইবে।

উদা. 1. A ও B দুই ব্যক্তি পরস্পর 48 কিলোমিটার দূরে আছে। একই সময়ে A ঘণ্টায় 7 কি. মি. ও B ঘণ্টায় 5 কি. মি. বেগে পরস্পরের দিকে অগ্রসর হইতে থাকিলে কতক্ষণে উভয়ে মিলিত হইবে ?

এখানে উভয়ের মধ্যে ব্যবধান 48 কিলোমিটার। A ও B পরস্পরের দিকে অগ্রসর হইতেছে বলিয়া প্রতি ঘণ্টায় উভয়ের মধ্যে দূরত্ব $(7+5)$ বা 12 কি. মি. কমিয়া আসিতেছে। সমস্ত ব্যবধান বা দূরত্ব কমিয়া গেলে উভয়ে মিলিত হইবে।

এক্ষণে 12 কি. মি. ব্যবধান কমে 1 ঘণ্টায়,

∴ 1 কি. মি. " " $\frac{1}{12}$ "

∴ 48 কি. মি. " " $\frac{1}{12} \times 48$ বা 4 ঘণ্টায়।

অতএব, 4 ঘণ্টা পরে উভয়ে মিলিত হইবে।

উদা. 2. 216 মিটার দূরবর্তী একটি শশককে ধরিবার জন্য একটি কুকুর সেকেণ্ডে 10 মিটার বেগে ছুটিল। যদি শশকটি সেকেণ্ডে 4 মিটার দৌড়ায়, তবে সে কতক্ষণে ধরা পড়িবে ?

এখানে উভয়ের মধ্যে ব্যবধান আছে 216 মিটার। এই সমস্ত ব্যবধানটুকু কমিয়া গেলেই শশকটি ধৃত হইবে।

শশক অপেক্ষা কুকুরটি প্রতি সেকেণ্ডে $(10-4)$ বা 6 মিটার বেশী দৌড়ায়, সুতরাং প্রতি সেকেণ্ডে ঐ ব্যবধান 6 মিটার করিয়া কমিতে থাকে।

এক্ষণে, 6 মিটার ব্যবধান কমে 1 সেকেণ্ডে,

∴ 1 " " " $\frac{1}{6}$ "

∴ 216 " " " $\frac{1}{6} \times 216$ বা 36 সেকেণ্ডে।

অতএব, শশকটি 36 সেকেণ্ডে ধরা পড়িবে।

উদা: 3. দুই ব্যক্তি একই স্থান হইতে যথাক্রমে ঘণ্টায় $7\frac{1}{2}$ কি. মি. ও $5\frac{1}{2}$ কি. মিটার বেগে চলিতে লাগিল। (1) যদি উহারা একই দিকে চলে এবং (2) যদি পরস্পর বিপরীত দিকে চলে, তবে 3 ঘণ্টা পরে উভয়ের মধ্যে কত ব্যবধান হইবে?

(1) একই দিকে গেলে 1 ঘণ্টায় উভয়ের মধ্যে ব্যবধান হইবে $(7\frac{1}{2}-5\frac{1}{2})$ বা 2 কিলোমিটার।

∴ 3 ঘণ্টা পরে ব্যবধান হইবে 2 কি. মি. × 3 বা 6 কিলো মিটার।

(2) উহারা বিপরীত দিকে গেলে এক ঘণ্টায় উভয়ের মধ্যে ব্যবধান হয় $(7\frac{1}{2}+5\frac{1}{2})$ বা 13 কিলোমিটার।

∴ 3 ঘণ্টায় ব্যবধান হইবে 13 কি. মি. × 3 বা 39 কিলো-মিটার।

উদা. 4. A ও B একই স্থান হইতে যথাক্রমে 8 ও 5 কিলো-মিটার বেগে চলিতেছে। (1) যদি উহারা একই দিকে চলে এবং (2) বিপরীত দিকে চলে, তবে কতক্ষণ পরে উভয়ের মধ্যে ব্যবধান 39 কিলো মিটার হইবে?

(1) একই দিকে গেলে 1 ঘণ্টায় ব্যবধান হয় $(8-5)$ বা 3 কি. মি.।

∴ 39 কি. মি. ব্যবধান হইতে $(39 \div 3)$ ঘণ্টা বা 13 ঘণ্টা সময় লাগে।

(2) উভয়ে বিপরীত দিকে গেলে 1 ঘণ্টায় ব্যবধান হয় $(8+5)$ বা 13 কি. মিটার।

∴ 39 কিলোমিটার ব্যবধান হইবে $(39 \div 13)$ ঘণ্টায় বা 3 ঘণ্টায়।

উদা. 5. একই স্থান হইতে A ঘণ্টায় 4 কিলোমিটার বেগে রওনা হওয়ার 3 ঘণ্টা পরে B রওনা হইল। B যদি ঘণ্টায় $5\frac{1}{2}$ কিলোমিটার যায়, তবে B কতক্ষণ পরে ও কতদূরে A-কে ধরিবে ?

A 3 ঘণ্টা আগে বাহির হইয়া ঐ 3 ঘণ্টায় (4 কি. মি. $\times$ 3) বা 12 কি. মি. আগাইয়া গিয়াছে। সুতরাং B যখন চলিতে আরম্ভ করিল তখন উভয়ের মধ্যে ব্যবধান 12 কিলোমিটার।

A অপেক্ষা B ঘণ্টায় $(5\frac{1}{2}-4)$ বা $1\frac{1}{2}$ কি. মিটার বেশী যায় অর্থাৎ ব্যবধান কমায়।

$\therefore$ B $(12 \div 1\frac{1}{2})$ ঘণ্টা বা 8 ঘণ্টা পরে A-কে ধরিবে।

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব = B 8 ঘণ্টায় যতটা যায় = $5\frac{1}{2}$ কি. মি. $\times$ 8

= 44 কিলোমিটার।

উদা. 6. রাম রওনা হওয়ার 4 ঘণ্টা পরে হরি রওনা হইল এবং ঘণ্টায় 5 কিলোমিটার বেগে চলিয়া 6 ঘণ্টা পরে রামকে ধরিল। রামের গতিবেগ নির্ণয় কর।

হরি যে-স্থানে রামকে ধরিয়াছে, সেখানে যাইতে হরির 6 ঘণ্টা এবং রামের $(4+6)$ বা 10 ঘণ্টা সময় লাগিয়াছে।

হরি 6 ঘণ্টায় যায় 5 কি. মি. $\times$ 6 বা 30 কি. মিটার।

$\therefore$ রাম 10 ঘণ্টায় যায় 30 কি. মিটার,

$\therefore$ রাম ঘণ্টায় (30 কি. মি. $\div$ 10) বা 3 কিলো মিটার বেগে যায়।

উদাহরণ 7. দুইটি স্থান A ও B হইতে দুইখানি গাড়ি যথাক্রমে ঘণ্টায় 32 কি. মি. ও 24 কি. মি. বেগে পরস্পরের দিকে অগ্রসর হইতে লাগিল। যখন উভয়ে মিলিত হইল তখন দেখা গেল, দ্রুতগামী

গাড়ীখানি অন্য গাড়ীটি অপেক্ষা 40 কিলো মিটার বেশী গিয়াছে। **A** ও **B**এর মধ্যে দূরত্ব কত ?

প্রথম গাড়ীটি দ্বিতীয় গাড়ী অপেক্ষা ঘণ্টায় $(32-24)$ কি. মি. বা 8 কি. মিটার বেশী যায়।

$\therefore$ 40 কি. মিটার বেশী যাইতে সময় লাগে $(40 \div 8)$ ঘ. বা 5 ঘণ্টা।

অতএব, উভয় ট্রেণ 5 ঘণ্টা যাওয়ার পর মিলিত হইয়াছে।
উভয়ে মিলিয়া 1 ঘণ্টায় যায় $(32+24)$ কি. মি. বা 56 কি. মিটার।

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $=56$ কি. মি. $\times 5=280$ কিলোমিটার।

উদাহরণ 8. একখানি গাড়ী বর্ধমান হইতে প্রাতে 8টায় রওনা হইয়া প্রাতে 12টায় হাওড়ায় পৌছিল এবং আর একখানি গাড়ী হাওড়া হইতে প্রাতে 9টায় রওনা হইয়া প্রাতে 11টা 30 মিনিটে বর্ধমানে পৌছিল। কখন তাহাদের সাক্ষাৎ হইয়াছিল ?

প্রথম গাড়ীখানি সমস্ত পথ যায় 4 ঘণ্টায়,
$\therefore$ উহা 1 ঘণ্টায় যায় সমস্ত পথের $\frac{1}{4}$ অংশ,
এবং দ্বিতীয় গাড়ীখানি সমস্ত পথ যায় $2\frac{1}{2}$ ঘণ্টায়,
$\therefore$ উহা 1 ঘণ্টায় যায় সমস্ত পথের $\frac{2}{5}$ অংশ।

প্রথম গাড়ীখানি 1 ঘণ্টা আগে রওনা হওয়ায় ঐ 1 ঘণ্টায় সমস্ত পথের $\frac{1}{4}$ অংশ গিয়াছে। সুতরাং 9টার সময় যখন দ্বিতীয় গাড়ীটি চলিতে লাগিল, তখন উভয় গাড়ীর মধ্যে ব্যবধান সমস্ত পথের $(1-\frac{1}{4})$ বা $\frac{3}{4}$ অংশ।

এখন, 1 ঘণ্টায় গাড়ী দুইটির মধ্যে ব্যবধান কমে পথের $(\frac{1}{4}+\frac{2}{5})$ বা $\frac{13}{20}$ অংশ।

$\therefore$ $\frac{3}{4}$ অংশ ব্যবধান কমিতে সময় লাগে $(\frac{3}{4} \div \frac{13}{20})$ ঘণ্টা বা $\frac{15}{13}$ ঘণ্টা বা 1 ঘণ্টা $9\frac{3}{13}$ মিনিট।

সুতরাং 9টার 1 ঘণ্টা $9\frac{3}{13}$ মিনিট পরে অর্থাৎ 10 বাজিয়া $9\frac{3}{13}$ মিনিটে উভয় গাড়ীর সাক্ষাৎ হইয়াছিল।

উদা. 9. ঘণ্টায় 10 কি. মিটার বেগে আসিতেছে এরূপ এক ব্যক্তির সহিত সাক্ষাৎ করিবার জন্য ঘণ্টায় 15 কি. মি. বেগে গমন করে এরূপ এক একটি দূতকে 10 মিনিট অন্তর পাঠান হইতেছে। কতক্ষণ অন্তর পর পর দূতগুলির সহিত ঐ ব্যক্তির সাক্ষাৎ হইবে?
[P. U. '26]

দূতগুলিকে 10 মিনিট পর পর পাঠান হইয়াছে। দূত 60 মিনিটে 15 কি.মি. যায়, $\therefore$ 10 মিনিটে যায় $\frac{15}{60}\times 10$ কি. মি. বা $\frac{5}{2}$ কি. মি.। অতএব, দ্বিতীয় দূত প্রথম দূতের $\frac{5}{2}$ কি. মি. পিছনে আছে। প্রথম দূতের সঙ্গে যখন ঐ ব্যক্তির দেখা হয় তখন দ্বিতীয় দূত এবং ঐ ব্যক্তির মধ্যে ব্যবধান $\frac{5}{2}$ কি. মি.। ঐ দূত ও লোকটি পরস্পর সম্মুখীন হইতেছে। সুতরাং 1 ঘণ্টায় উভয়ে মিলিয়া $(15+10)$ বা 25 কি. মি. ব্যবধান কমাইতে পারে। $\therefore$ $\frac{5}{2}$ কি. মি. ব্যবধান কমাইতে সময় লাগে $(\frac{5}{2}\div 25)$ বা $\frac{1}{10}$ ঘণ্টা বা 6 মিনিট।

সুতরাং 6 মিনিট অন্তর অন্তর লোকটির সহিত এক একটি দূতের দেখা হইবে।

উদা. 10. 60 কি. মিটার পরিধি-বিশিষ্ট কোন বৃত্তাকার পথের একই স্থান হইতে একই সময়ে A, B ও C যথাক্রমে ঘণ্টায় 2, 5 ও 3 কি. মি. বেগে চলিতে আরম্ভ করিল। যদি A ও B একই দিকে এবং C উহার বিপরীত দিকে চলিতে থাকে, তবে তাহারা কখন পুনরায় একত্রে মিলিত হইবে?

প্রতি ঘণ্টায় A অপেক্ষা B$(5-2)$ বা 3 কি. মিটার বেশী যায়। এখানে B, A অপেক্ষা পূরা পথ 60 কি. মি. বেশী গেলে উভয়ে একই স্থানে মিলিত হইবে। 60 কি. মি. বেশী যাইতে সময় লাগে $(60\div 3)$ বা 20 ঘণ্টা। অতএব, A ও B প্রতি 20 ঘণ্টা অন্তর মিলিত হয়।

আবার, A ও C বিপরীত দিকে চলিয়া পরস্পরের দিকে অগ্রসর হয় বলিয়া প্রতি ঘণ্টায় উভয়ের ব্যবধান (2+3) বা 5 কিলো মিটার কমিয়া আসে।

∴ 60 কি.মি. ব্যবধান কমিতে সময় লাগে (60÷5) বা 12 ঘণ্টা।

অতএব, A ও C 12 ঘণ্টা অন্তর মিলিত হয়। এই 20 ঘণ্টা ও 12 ঘণ্টার ল. সা. গু. = 60 ঘণ্টা। অতএব, 60 ঘণ্টা পরে তাহারা প্রথম মিলিত হইবে।

উদা. 11. কোন স্থানে 5 মিনিট অন্তর কামান দাগা হইতেছিল এবং সেইদিকে একটি ট্রেন অগ্রসর হইতেছিল। ঐ ট্রেনের কোন যাত্রী 4 মিনিট 49 সেকেণ্ড অন্তর পর পর তোপধ্বনি শুনিল। শব্দের গতি সেকেণ্ডে 1156 ফুট হইলে ঘণ্টায় ট্রেনের গতিবেগ কত ?

A C B

মনে কর, A চিহ্নিত স্থানে কামান দাগা হইতেছে, এবং লোকটি প্রথম শব্দ B এবং দ্বিতীয় শব্দ C চিহ্নিত স্থানে শুনিল। যদি লোকটি B স্থানেই থাকিত, তবে 5 মিনিট পরে দ্বিতীয় শব্দ শুনিত ; কিন্তু এখানে বলা আছে যে 4 মি. 49 সেকেণ্ড পরে সে দ্বিতীয় শব্দ শুনিয়াছে। অতএব, বুঝা যাইতেছে যে লোকটি কামানের দিকে BC দূরত্ব আগাইয়া যাওয়ায় শব্দকে আর CB দূরত্ব যাইতে হইতেছে না বলিয়া শব্দ শুনিতে (5 মি. – 4 মি. 49 সে.) বা 11 সে. কম সময় লাগে। সুতরাং BC দূরত্ব যাইতে ট্রেনের 4 মি. 49 সেকেণ্ড বা 289 সে. এবং শব্দের 11 সেকেণ্ড সময় লাগে।

অতএব BC = 1156 ফুট × 11, এই দূরত্ব ট্রেন 289 সেকেণ্ড যায়।

∴ ট্রেন 1 সেকেণ্ড যায় $\frac{1156 \times 11}{289}$ ফুট,

∴ ট্রেন 1 ঘণ্টায় যায় $\frac{1156 \times 11 \times 60 \times 60}{289 \times 3 \times 1760}$ মাইল বা 30 মাইল।

প্রশ্নমালা 9

1. (*a*). **মুখে মুখে উত্তর কর ঃ—**

(1) ঘণ্টায় 6 কি. মিটার বেগে 15 কি. মিটার যাইতে কত সময় লাগে ?

(2) আমি ঘণ্টায় 2 কি. মিটার চলি ; কখন বাহির হইলে 4টার সময় 7 কিলো মিটার যাইব ?

(3) যদি একই স্থান হইতে তুমি ঘণ্টায় $1\frac{1}{2}$ কি. মিটার বেগে উত্তর দিকে এবং আমি ঘণ্টায় 2 কি. মি. বেগে দক্ষিণ দিকে চলিতে আরম্ভ করি, তবে কতক্ষণে আমাদের মধ্যে 14 কিলো মিটার ব্যবধান হইবে ?

(4) A হইতে B 6 কিলো মিটার দূরে আছে। A ও B যথাক্রমে ঘণ্টায় 2 কি. মি. ও 3 কি. মি. বেগে পরস্পরের দিকে চলিলে কতক্ষণে তাহারা মিলিত হইবে ?

(5) একজন তোমার 6 হে. মিটার আগে আছে। তুমি মিনিটে 6 ডে. মি. যাও এবং সেই ব্যক্তি মিনিটে 4 ডে. মি. যায়। তুমি কতক্ষণে তাহাকে ধরিবে ?

(6) যদি কোন নদীর স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 3 কি. মিটার হয় এবং আমি স্রোতের বিপরীত দিকে ঘণ্টায় 2 কি. মি. বেগে নৌকা চালাইতে থাকি, তবে কি ফল হইবে ?

1. (*b*). ঘণ্টায় 40 কি. মি. বেগে ধাবমান ট্রেনটি 21 মিনিটে কতদূর যাইবে ?

2. একটি মোটর গাড়ী 24 মিনিটে 20 কি. মিটার যায়, উহা 16 মিনিটে কতদূর যাইবে ?

3. এক ব্যক্তি সাইকেলে 13 ঘণ্টায় 52 কি. মিটার গিয়াছে। সমগতিতে সে 64 কি. মিটার কতক্ষণে যাইবে ?

4. একটি ট্রেন 4 ঘণ্টায় 42 কি. মিটার যায়। উহা অপরাহ্ণ 1টা হইতে রাত্রি 9টা 40 মিনিট পর্যন্ত সময়ে কতদূর যাইবে ?

5. 12 কিলোমিটার দূরে তোমার বন্ধুর বাড়ী। তুমি মোটর গাড়ীতে ঘণ্টায় 40 কি. মি. বেগে যাইয়া কতক্ষণে সেখানে পৌঁছিবে ?

6. একটি ট্রেন 5 মিনিটে $4\frac{1}{2}$ কি. মিটার যায়। 36 কি. মি. যাইতে তাহার কত সময় লাগিবে ?

7. 78 কি. মিটার যাইতে যদি 13 ঘণ্টা সময় লাগে, তবে ঐ হারে 60 কি. মিটার যাইতে কত সময় লাগিবে ?

8. বিকালে 3টার সময় আমি আমার গন্তব্য পথের $\frac{2}{5}$ অংশ এবং 5টার সময় ঐ পথের $\frac{2}{3}$ অংশ গিয়াছি। আমি কখন বাহির হইয়াছি এবং কখন পৌঁছিব ?

9. A ও B 117 কি. মিটার দূর হইতে যথাক্রমে ঘণ্টায় 5 ও 4 কি. মিটার বেগে পরস্পরের অভিমুখে যাইতে থাকিলে কতক্ষণে উভয়ের সাক্ষাৎ হইবে ?

10. একই স্থান হইতে একজন উত্তর দিকে ঘণ্টায় $3\frac{1}{2}$ কিলোমিটার এবং আর একজন দক্ষিণ দিকে ঘণ্টায় 8·5 কিলোমিটার করিয়া যাইতে লাগিল। $7\frac{1}{2}$ ঘণ্টা পরে উভয়ের মধ্যে ব্যবধান কত হইবে ?

11. দুই ব্যক্তি পরস্পর 200 মিটার দূরে আছে। উহারা পরস্পরের দিকে যথাক্রমে মিনিটে 10 মিটার ও 15 মিটার হিসাবে অগ্রসর হইতে লাগিল। কতক্ষণে উভয়ে মিলিত হইবে ?

12. A 1 কিলোমিটার যাইবার পর B ঘণ্টায় 8 কি. মিটার বেগে যাইয়া 15 মিনিটে A-কে ধরিল। A-র গতিবেগ নির্ণয় কর।

13. A 44 কি. মিটার যাইবার পর B ঘণ্টায় 14 কি. মি. 80 মিটার বেগে যাইয়া 10 ঘণ্টায় তাহাকে ধরিল। A-র গতিবেগ নির্ণয় কর।

14. A যতক্ষণে $3\frac{3}{4}$ কি. মি. যায় B ততক্ষণে 4 কি. মিটার যায়। A 6 দিনে 165 কি. মিটার গিয়াছে, B 15 দিনে কতদূর যাইবে ?

15. একটি জাহাজ 9 দিন 14 ঘণ্টায় 2760 কি. মিটার এবং একটি ট্রেন 18 ঘণ্টায় 405 কি. মিটার যায়। উভয়ের গতির তুলনা কর।

16. একটি শশককে ধরিবার জন্য একটি কুকুর 50 মিটার পিছন হইতে ছুটিল। শশক মিনিটে 15 মিটার এবং কুকুর মিনিটে 17 মিটার যায়। কতক্ষণে শশকটি ধরা পড়িবে ?

17. ঘণ্টায় 4 কিলো মিটার বেগে এক স্থান হইতে অন্য স্থানে যাইতে এবং তথায় 30 মিনিট বিশ্রাম করিয়া ঘণ্টায় 8 কি. মি. বেগে ফিরিয়া আসিতে 8 ঘণ্টা 15 মিনিট সময় লাগিল। স্থান দুইটির মধ্যে দূরত্ব কত ? [বৃত্তি. 1935]

18. একটি পলায়মান চোরকে ধরিবার জন্য 114 মিটার দূর হইতে একজন চৌকিদার ছুটিল। চোরটি মিনিটে 15 মিটার ও চৌকিদার মিনিটে 21 মিটার বেগে ছুটিলে কতক্ষণে চোরটি ধৃত হইবে ?

19. একজন চৌকিদার চোরের 100 গজ পশ্চাতে আছে। যদি 1 মাইল দৌড়াইতে চৌকিদারের 6 মিনিট ও চোরের 10 মিনিট লাগে, তবে কত দূরে চৌকিদার চোরকে ধরিবে ? [এ. প্র. 1895 ; ছাত্র. 1929]

20. একটি ট্রেন প্রাতে 6টায় রওনা হইয়া ঘণ্টায় 40 কি. মিটার বেগে যাইতে লাগিল। উহা কখন 136 কি. মিটার দূরবর্তী স্টেশনে পৌঁছিবে (মধ্যে উহাকে বিভিন্ন স্টেশনে 20 মিনিট থামিতে হইয়াছে) ?

21. হাওড়া হইতে বর্ধমান 60 কি. মিটার দূরে। হাওড়া হইতে A ঘণ্টায় $12\frac{1}{2}$ কি. মিটার বেগে এবং একই সময়ে B ঘণ্টায় $7\frac{1}{2}$ কি. মি. বেগে বর্ধমান হইতে পরস্পরের দিকে যাইতে লাগিল। কতক্ষণ পরে এবং হাওড়া হইতে কত দূরে উভয়ের সাক্ষাৎ হইবে ?

22. একটি ট্রেন বর্ধমান হইতে 6 ঘণ্টায় হাওড়ায় এবং আর একটি ট্রেন হাওড়া হইতে 4 ঘণ্টায় বর্ধমান যাইতে পারে। উভয় ট্রেনই প্রাতে 7টায় রওনা হইলে কখন তাহাদের সাক্ষাৎ হইবে ?

23. একটি চোর পলায়ন করিবার 15 মিনিট পরে তাহাকে ধরিবার জন্য চৌকিদার ছুটিল। উহারা যথাক্রমে ঘণ্টায় 12 কি. মিটার ও 16 কিলো মিটার বেগে ছুটিল। কত সময়ে ও কত দূরে চোরটি ধরা পড়িবে ?

24. একটি ট্রেন সকাল 7টায় হাওড়া হইতে রওনা হইয়া বেলা 11টায় বর্ধমান পৌঁছায় এবং আর একটি ট্রেন প্রাতে 8টায় বর্ধমান হইতে রওনা হইয়া 10টা 30 মিনিটে হাওড়ায় পৌঁছায়। কখন তাহাদের সাক্ষাৎ হয় ?

[ঢা. বো. 1940]

25. একটি ট্রেন নিজ স্বাভাবিক বেগের $\frac{4}{7}$ বেগে চলিয়া 14 ঘণ্টায় কোন স্থানে পৌঁছিল। স্বাভাবিক বেগে গেলে ঐ স্থানে পৌঁছিতে উহার কত সময় লাগিত ?

26. রাম ও হরি একই স্থান হইতে একই সময়ে যথাক্রমে 4 কি. মি. ও 2 কি. মিটার বেগে (1) পরস্পর বিপরীত দিকে, (2) একই দিকে যাইতে লাগিল। কত ঘণ্টা পরে পরস্পরের মধ্যে দূরত্ব 18 কিলো মিটার হইবে ?

27. কোন লোককে একটি নির্দিষ্ট সময়ে কোন স্থানে সভায় উপস্থিত হইতে হইবে। সে যদি ঘণ্টায় 3 কিলো মিটার করিয়া যায়, তবে তাহার 10 মিনিট বিলম্ব হয় ; আর যদি ঘণ্টায় 4 কিলো মিটার করিয়া যায়, তবে 5 মিনিট পূর্বে পৌঁছায়। লোকটিকে কতদূরে যাইতে হইবে ?

28. কোন ট্রেন ঘণ্টায় 30 কিলো মিটার বেগে যায় এবং 75 কি. মিটার অন্তর জল লইবার জন্য আধ ঘণ্টা করিয়া থামে। 375 কিলোমিটার যাইতে উহার মোট কত সময় লাগিবে ?

29. রাম ও হরি 2 কিলো মিটার দৌড়াইবার জন্য যাত্রা করিল। রাম প্রতি সেকেণ্ডে 16 মিটার করিয়া দৌড়াইয়া হরি অপেক্ষা 1 মিনিট 15 সেকেণ্ড পূর্বে গন্তব্য স্থানে পৌঁছাইল। হরি কিরূপ বেগে দৌড়াইয়াছিল?

30. দুইটি বালক কোন নির্দিষ্ট স্থান হইতে দৌড়াইতে আরম্ভ করিল। 330 মিটার যাইলে একটি অন্যটিকে 5 মিটার পশ্চাতে রাখিয়া যায়। এইরূপে 15 কি. মিটার 840 মিটার পথ যাইলে উহারা পরস্পর কত দূরে থাকিবে?

31. A যতক্ষণে 8 মিটার দৌড়ায় B ততক্ষণে 9 মিটার দৌড়ায়। উভয়ে এক সঙ্গে দৌড়াইতে আরম্ভ করিল। B যখন 252 মিটার দৌড়াইয়াছে, A তখন তাহার কত পশ্চাতে থাকিবে?

32. কোন লোককে 8টায় একটি স্থানে পৌঁছাইতে হইবে। সে যদি ঘণ্টায় 4 কি. মিটার বেগে যায়, তবে 8টা 10 মিনিটে তথায় পৌঁছায়; কিন্তু ঘণ্টায় 5 কি. মিটার বেগে গেলে 7টা 55 মিনিটে তথায় পৌঁছায়। তাহাকে কত দূর যাইতে হইবে?

33. A যতক্ষণে $3\frac{3}{4}$ কিলো মিটার পথ চলে B ততক্ষণে 4 কিলো মিটার চলে। A 6 দিনে 165 কি. মি. চলিয়াছে, B 15 দিনে কত পথ চলিবে?

34. এক ব্যক্তি তাহার গৃহ হইতে 30 ঘণ্টায় কোন স্থানে যাইতে পারে, তাহার গতিবেগের $\frac{1}{15}$ অংশ কমাইলে সে ঐ সময়ে 10 কিলোমিটার কম যায়। ঘণ্টায় তাহার গতিবেগ কত?

35. A 44 মিটার যাইবার পর B ঘণ্টায় 14 কি. মিটার 80 মিটার বেগে যাইয়া 12 মিনিটে তাহাকে ধরিল। A-র গতিবেগ নির্ণয় কর।

36. এক অশ্বারোহী ঘণ্টায় 12 কিলোমিটার যায় এবং প্রতি 7 কি. মি. পর পর ঘোড়া বদলাইবার জন্য 5 মিনিট করিয়া থামে। 94 কিলোমিটার যাইতে তাহার কত সময় লাগিবে?

37. এক শৃগাল 174 মিটার দূরবর্তী এক ধাবমান ছাগশিশুকে দেখিয়া 6 মিনিটে তাহাকে ধরিয়া ফেলিল। যদি ছাগশিশু প্রতি মিনিটে 174 মিটার লাফাইয়া থাকে, তবে শৃগাল প্রতি মিনিটে কত বেগে ছুটিয়াছিল?

38. এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 3 কি. মি. বেগে A হইতে Bতে গেল এবং তথায় 1 ঘণ্টা বিশ্রাম করিয়া ঘণ্টায় 5 কি. মিটার বেগে A-তে ফিরিয়া আসিল। যদি তাহার মোট 2 ঘণ্টা 20 মিনিট সময় লাগিয়া থাকে, তবে উভয় স্থানের দূরত্ব কত?

39. যদু নিজ গৃহ হইতে ঠিক উত্তর দিকে ঘণ্টায় 3 কি. মিটার বেগে চলিয়া 2 ঘণ্টায় মামার বাড়ী এবং সেখান হইতে ঠিক পূর্বদিকে চলিয়া আর $2\frac{2}{3}$ ঘণ্টায় জ্যেঠার বাড়ী পৌঁছিল। সে যদি ঐ বেগে গৃহ হইতে ঠিক সোজা জ্যেঠার বাড়ী যাইত, তবে সেখানে কতক্ষণে পৌঁছিত ?

40. একটা গাড়ী তাহার স্বাভাবিক বেগের $\frac{3}{5}$ বেগে চলিয়া গন্তব্যস্থানে 2 ঘণ্টা 30 মিনিট বিলম্বে পৌঁছিল। স্বাভাবিক বেগে চলিলে তথায় পৌঁছাইতে কত সময় লাগিত ? [পা. প্র. 1883]

41. একখানি গাড়ী বেলা 12টার সময় ছাড়িয়া ঘণ্টায় 16 কি. মি. বেগে যাইতে লাগিল। একই স্থান হইতে আর একখানি গাড়ী বেলা 1টার সময় ছাড়িয়া রাত্রি 9টার সময় উহাকে ধরিল। পরের গাড়ীখানি ঘণ্টায় কত কিলো মিটার করিয়া গেল ?

42. বর্ধমান হইতে একখানা গাড়ী ঘণ্টায় 30 কিলো মিটার বেগে কাশীর দিকে এবং কাশী হইতে একখানা গাড়ী ঘণ্টায় 50 কি. মিটার বেগে বর্ধমানের দিকে একই সময়ে রওনা হইল। উহারা যখন মিলিত হইল তখন দেখা গেল একখানি গাড়ী অপর গাড়ী অপেক্ষা 100 কিলো মিটার অধিক চলিয়াছে। স্থান দুইটির মধ্যে দূরত্ব কত ?

43. একটি ট্রেন ঘণ্টায় 40 কিলো মিটার বেগে চলিলে যথাসময়ে নির্দিষ্ট স্টেশনে পৌঁছায়, কিন্তু ঘণ্টায় 32 কিলো মিটার বেগে গেলে পৌঁছিতে 15 মিনিট বিলম্ব হয়। গন্তব্য স্থানের দূরত্ব কত ?

44. A ও B কোন স্থানে যাইবার জন্য একই সময় একই স্থান হইতে রওনা হইল। A যত বেগে গেল B তাহার $\frac{5}{6}$ বেগে চলিয়া A-এর 1 ঘণ্টা 15 মিনিট পরে পৌঁছিল। ঐ স্থানে কে কত সময়ে গিয়াছিল ?

45. একটি ট্রেন হাওড়া হইতে প্রাতে 8টায় রওনা হইয়া বর্ধমানে 10টা 30 মিনিটে পৌঁছায় ; অপর একটি ট্রেন বর্ধমান হইতে প্রাতে 8টা 30 মিনিটে রওনা হইয়া 10টায় হাওড়ায় পৌঁছায়। উভয় ট্রেনের কখন সাক্ষাৎ হয় ?

46. হাওড়া হইতে মগরা 33 কিলো মিটার ; একই সময়ে A হাওড়া হইতে এবং B মগরা হইতে রওনা হইয়া 4 ঘণ্টা পরে মিলিত হইল। ইহার $3\frac{1}{3}$ ঘণ্টা পরে A মগরায় পৌঁছিলে তাহাদের গতিবেগ কত ?

47. রহিম তাহার গৃহ হইতে করিমের বাড়ীর দিকে সাইকেলে ঘণ্টায় 10 কিলো মিটার বেগে এবং করিম নিজ গৃহ হইতে রহিমের বাড়ীর দিকে ঘণ্টায়

6 কি. মিটার বেগে যাইতে লাগিল। যখন উভয়ের সাক্ষাৎ হইল তখন একজন অন্যজন অপেক্ষা 12 কিলো মিটার বেশী গিয়াছে। উভয়ের গৃহের মধ্যে দূরত্ব কত?

48. রাম ও হরি যথাক্রমে হাওড়া ও বৈঁচী হইতে একই সময়ে রওনা হইয়া পরস্পর সম্মুখীন হইতে লাগিল। 10 ঘণ্টা পরে উভয়ের যে স্থানে সাক্ষাৎ হইল তাহা উভয় স্থানের মধ্যস্থল হইতে হাওড়ার দিকে $2\frac{1}{2}$ কিলো মিটার দূরে। হরি ঘণ্টায় 3 কিলো মিটার চলিলে উভয় স্থানের মধ্যে দূরত্ব কত?

49. মির্জাপুর ও দিল্লী হইতে দুইখানি ট্রেন একই সময়ে যথাক্রমে 16 ও 21 মাইল বেগে পরস্পরের দিকে রওনা হইল। উহারা যখন মিলিত হইল তখন একটি ট্রেন অন্যটি অপেক্ষা 60 মাইল বেশী গিয়াছে। উভয় স্থানের মধ্যে দূরত্ব কত? [A. U. 1894]

50. A হইতে B স্থানে যাইতে প্রথমে 3 কি. মিটার চড়াই, পরে 8 কি. মিটার সমভূমি এবং শেষের 6 কি. মিটার উৎরাই পথ। এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 1 কি. মিটার চড়াই পথে, 4 কি. মি. সমভূমিতে এবং 6 কি. মি. উৎরাই পথে চলিতে পারে। A হইতে Bতে গিয়া আবার Aতে ফিরিয়া আসিতে তাহার মোট কত সময় লাগিবে?

51. ঘণ্টায় 5 কিলো মিটার বেগে এক ব্যক্তি কোন শহরের দিকে আসিতেছিল। ঐ শহর হইতে 12 মিনিট অন্তর তাহার নিকট দূত পাঠান হইতেছিল। দূতগুলি যদি ঘণ্টায় 10 কি. মিটার বেগে যায়, তবে কতক্ষণ অন্তর পর পর দূতগণের সহিত লোকটির সাক্ষাৎ হইয়াছিল?

52. 14 কি. মিটার পরিধিবিশিষ্ট কোন বৃত্তাকার পথের একই স্থান হইতে একই সময়ে দুই ব্যক্তি যথাক্রমে ঘণ্টায় $4\frac{1}{2}$ কি. মি. ও $2\frac{1}{2}$ কি. মি. বেগে চলিতে আরম্ভ করিল। যদি তাহারা (i) একই দিকে, (ii) পরস্পর বিপরীত দিকে চলিতে থাকে, তবে কতক্ষণে তাহারা পুনরায় মিলিত হইবে?

53. কোন ট্রেন ঘণ্টায় 42 কিলো মিটার বেগে চলিলে যথাসময়ে গন্তব্য স্থানে পৌঁছায়, কিন্তু 40 কি. মিটার বেগে চলিলে সেখানে পৌঁছিতে 15 মিনিট বিলম্ব হয়। গন্তব্য স্থানের দূরত্ব কত?

54. এক ব্যক্তিকে 24 কি. মি. পথ যাইতে হইবে। 1 ঘণ্টা 40 মিনিট চলার পর সে দেখিল যে, সে যতদূর গিয়াছে তাহা বাকী পথের $\frac{5}{7}$ অংশ। লোকটির গতিবেগ সেকেণ্ড-মিটারে প্রকাশ কর। [U. U. '66]

55. একটি ট্রেন হাওড়া হইতে বিকালে 5টায় যাত্রা করিয়া ঘণ্টায় 25 কি. মি. বেগে যাইতে লাগিল। আর একটি ট্রেন হাওড়া হইতে রাত্রি 8টায় রওনা হইয়া ঘণ্টায় 40 কি. মি. বেগে সমান্তরাল রেল লাইনে যাইতে লাগিল। দ্বিতীয় ট্রেনটি কখন ও কোথায় প্রথম ট্রেনকে অতিক্রম করিবে?

[U. U. '63]

56. 4 মিনিট অন্তর কোন শহরে তোপধ্বনি হইতেছে এবং সেইদিকে একটি ট্রেন অগ্রসর হইতেছে। ঐ ট্রেনের কোন যাত্রী 3 মিনিট 50 সেকেণ্ড অন্তর পর পর দুইটি তোপধ্বনি শুনিল। যদি শব্দের গতি সেকেণ্ডে $421\frac{2}{3}$ মিটার হয়, তবে ঘণ্টায় ট্রেনের গতি কত?

---

§. 14. ঐকিক নিয়মে আয়কর (Income-Tax):

প্রত্যেক ব্যক্তিকে, ফার্ম, যৌথ পরিবার এবং কোম্পানীকে আয়ের উপর গভর্ণমেণ্টকে কর (Tax) দিতে হয়। ইহাকে আয়কর বলে। আয় করিলেই যে আয়কর দিতে হয় তাহা নহে। আয়ের পরিমাণ একটা নির্দিষ্ট মাত্রা ছাড়াইয়া গেলেই আয়কর দিবার প্রশ্ন উঠে। ইহাকে 'ছাড়ের সীমা' (Exemption limit) বলে। এই ছাড়ের পরিমাণ বিভিন্ন ধরনের। একক ব্যবসায়ী বা ব্যক্তি, অরেজেস্ট্রিকৃত ফার্ম-এর ক্ষেত্রে একরূপ, যৌথ হিন্দু পরিবার-এর বেলায় একরূপ, রেজিস্টার্ড ফার্ম (আয়কর কর্তৃপক্ষ কর্তৃক মঞ্জুরীকৃত)-এর ক্ষেত্রে একরূপ ছাড় হয় এবং কোম্পানীর বেলায় কোন প্রকার ছাড় নাই।

প্রতি বৎসর ভারত সরকার আইন করিয়া ছাড়ের সীমা এবং করের হার নির্ধারণ করেন।

এই প্রসঙ্গে একটা কথা বলিয়া রাখা প্রয়োজন, সরকারী অফিসাদিতে যে বৎসর গণনা করা হয় তাহা এপ্রিল মাসের 1লা হইতে পরের বৎসর 31শে মার্চ শেষ হয়। ইহাকে আর্থিক বৎসর বলে (financial year)। সময়ের পরিমাণ 12 মাসই থাকে।

নিম্নে বিভিন্ন ক্ষেত্রে ছাড়ের সীমা দেখান হইল :—

	1974-75 সাল
একক ব্যক্তি ও অরেজেস্ট্রিকৃত ফার্ম	6000 টাকা
রেজিস্টার্ড ফার্ম	10,000 টাকা
যৌথ পরিবার	6000 টাকা
কোম্পানী	0

অর্থাৎ 1974-75 সালে একক ব্যক্তির 6000 টাকার বেশী আয় হইলে, রেজিস্টার্ড ফার্মের 10,000 টাকার বেশী আয় হইলে, যৌথ পরিবারের 6000 টাকার বেশী আয় হইলেই, তবে আয়কর দিতে হইবে। কোম্পানীর বেলায় ছাড় কিছুই নাই।

করের হারও বিভিন্ন ক্ষেত্রে বিভিন্ন। আয়ের পরিমাণের তারতম্য অনুসারে করের হার কম ও বেশী হয়। এইজন্য প্রতি বৎসর গভর্ণমেণ্ট একটি তালিকা (Tax Schedule) প্রস্তুত করিয়া দেন।

নিম্নে 1974-75 সালের তালিকা দেখান হইল :—

একক ব্যক্তি, যৌথ পরিবার ও অরেজিস্ট্রিকৃত ফার্ম :—

প্রথম 6000 টাকা	আয়ের	জন্য	(কিছুই নহে)
পরের 5000	"	"	10%
পরের 5000	"	"	17%
পরের 5000	"	"	23%
পরের 5000	"	"	30%
পরের 5000	"	"	40%
পরের 10,000	"	"	50%
পরের 20,000	"	"	60%
পরের 20,000	"	"	70%

পরের 20,000 টাকা আয়ের জন্য	75%
পরের 1,00,000 " "	80%
অবশিষ্ট " "	85%
	(সার চার্জ 10%)

ফার্ম (রেজিস্টার্ড) :—

প্রথম 10,000 টাকার জন্য	(কিছুই নহে)
পরের 15,000 "	4%
পরের 25,000 "	6%
পরের 50,000 "	12%
অবশিষ্ট	20%

ইহা ছাড়া তালিকা অনুসারে নির্ধারিত সমগ্র আয়করের $\frac{1}{10}$ অংশ (গভর্ণমেণ্ট প্রতিবৎসর ইহা ঠিক করেন) **সারচার্জ** বা অতিরিক্ত কর দিতে হয়।

এক বৎসরে (12 মাসে) যাহাই আয় করা যায় (খরচের প্রশ্ন নাই) তাহাই আয়করযোগ্য আয়। কিন্তু গভর্ণমেণ্ট কয়েকপ্রকার আয়কে কিছুটা পরিমাণ পর্যন্ত এবং কয়েক প্রকার ব্যয়কে কিছুটা পরিমাণ পর্যন্ত (ইহা সরকার আয়কর আইনে লিপিবদ্ধ করিয়াছেন) রেহাই দিয়াছেন। যথা—(i) ব্যাঙ্ক হইতে প্রাপ্ত সুদ ও কোম্পানীর কাগজে প্রাপ্ত লভ্যাংশ ; কিন্তু এই ছাড়ের পরিমাণ একত্রে 3000 টাকা পর্যন্ত (74-75 সালে)। (ii) জীবনবীমার প্রিমিয়াম এবং চাকুরীজীবীর প্রভিডেন্ট ফাণ্ডে জমা দেওয়া টাকা, এক্ষেত্রে একত্রে 2000 টাকা পর্যন্ত। যদি পরিমাণ আরো বেশী হয়, তবে পরের 3000এর জন্য 50% হারে এবং অবশিষ্টাংশের জন্য 40% হারে। (iii) নিজের ব্যবহারের জন্য কেনা পুস্তকের জন্য 500 টাকা পর্যন্ত এবং মোটরকার (কাজের জন্য) রাখার জন্য 2400 টাকা রেহাই হয়।

সুতরাং দেখা যাইতেছে এক্ষেত্রে যাহাই আয় করা হয় তাহাই আয়কর যোগ্য নহে। ইহা ছাড়া আরও দুই এক প্রকারের খরচ বাদ যায়। তাহার বিস্তৃত আলোচনা এখানে সম্ভব নহে।

উদাহরণ ঃ—এক ব্যক্তির 1974-75 সালের আয় হইল, বেতন 12,000 টাকা, বাড়ীভাড়া প্রাপ্ত (নেট) 2000 টা. এবং ব্যাঙ্কের সুদ ও কোম্পানী কাগজের সুদ 8000 টাকা। তাহার আয়কর যোগ্য আয় কত ? সে ঐ বৎসর 2500 টাকা জীবনবীমা ও 3500 টাকা নিজের প্রভিডেন্ট ফাণ্ডে জমা দিয়াছে।

বেতন	12,000 টাকা
বাড়ীভাড়া	2,000 টাকা
ব্যাঙ্ক সুদ ও কোং কাগজের লভ্যাংশ	8,000 টাকা
মোট আয় (Gross Income)	22,000 টাকা
করমুক্ত আয়	6,000 টাকা
	16,000 টাকা
ছাড় ঃ—ব্যাঙ্ক ও কাগজের সুদ = 3,000 প্রিমিয়াম প্রঃ ফাণ্ড 2000 + 3000-র 50% + অবশিষ্টের 40% = 3,900	6900 টা.
আয়কর যোগ্য আয়	9,100 টাকা

উদাহরণমালা

[প্রথমে সাধারণভাবে আয়কর নির্ণয়ের উদাহরণ]

উদা. 1. এক ব্যক্তি টাকায় 5 পয়সা হারে মোট 271 টাকা আয়কর দেয়। তাহার বাৎসরিক আয় কত ?

271 টা. = 27100 প.

5 পয়সা আয়কর হয় 1 টাকা আয় হইলে,

∴ 1 " " " $\frac{1}{5}$ টা. " "

∴ 27100 " " " $\frac{1}{5}$ টা. × 27100 বা 5420 টা. আয় হইলে।

∴ নির্ণেয় বাৎসরিক আয় = 5420 টাকা।

উদা. 2. আয়কর টাকা প্রতি 6 পয়সা হইতে কমিয়া 4 পয়সা হওয়ায় এক ব্যক্তিকে 124 টাকা কম আয়কর দিতে হইল। তাহার আয় কত ?

2 পয়সা আয়কর কমে 1 টাকা আয় হইলে,

∴ 1 „ „ „ $\frac{1}{2}$ টা. „ „

∴ 12400„ „ „ $\frac{1}{2}$ টা. $\times$ 12400 বা 6200 টাকা আয় হইলে।

অতএব লোকটির মোট আয় = 6200 টাকা।

উদা. 3. বৎসরে 4% হারে আয়কর দিয়া এক ব্যক্তির 1920 টাকা থাকে। তাহার মোট আয় কত?

100 টাকায় 4 টাকা আয়কর দিয়া 96 টাকা থাকে।

96 টাকা থাকে 100 টাকা আয় হইলে,

∴ 1 টাকা থাকে $\frac{100}{96}$ টাকা আয় হইলে,

∴ 1920 টা. থাকে $\frac{100}{96} \times 1920$ টা. বা 2000 টাকা আয় হইলে।

অতএব, তাহার নির্ণেয় আয় বৎসরে 2000 টাকা।

[আয়কর আইনে আয়কর নির্ণয়]

উদা. 4. এক ব্যক্তির মোট বার্ষিক আয় 6250 টাকা। আয়ের প্রথম 5000 টাকা কর মুক্ত। পরের 5000 টাকার জন্য 5% আয়কর এবং মোট করের $\frac{1}{10}$ অংশ সার চার্জ দিতে হয়। তাহাকে কত আয়কর দিতে হয় তাহা নির্ণয় কর।

আয়ের প্রথম 5000 টাকা আয়কর মুক্ত।

∴ করযোগ্য আয় = 6250 টা. − 5000 টা. = 1250 টাকা।

5% হারে এই পরবর্তী 1250 টাকার উপর কর

$= \frac{5}{100} \times 1250$ টাকা $= \frac{125}{2}$ টাকা $= 62\frac{1}{2}$ টাকা।

∴ দেয় কর = $62\frac{1}{2}$ টাকা

∴ সার চার্জ = $62\frac{1}{2}$ টাকার $\frac{1}{10} = 6\frac{1}{4}$ টাকা,

∴ মোট কর দিতে হইবে ($62\frac{1}{2}$ টা. + $6\frac{1}{4}$ টা.) বা $68\frac{3}{4}$ টাকা
বা 68 টাকা 75 পয়সা।

উদা. 5. আয়কর যোগ্য আয়ের উপর 5% হারে এবং করের $\frac{1}{10}$ অংশ সারচার্জ দিতে হইলে এক ব্যক্তিকে 68·75 টাকা আয়কর দিতে হয়। (i) তাহার আয়করযোগ্য আয় কত? (ii) করমুক্ত আয় বা ছাড় যদি 5000 টাকা হয়, তবে সমগ্র আয় কত?

5 টাকা আয়কর দিতে হয় 100 টাকায়

এবং $5 \times \frac{1}{10}$ টাকা বা $\frac{1}{2}$ টাকা সারচার্জ দিতে হয় 100 টাকায়।

∴ মোট আয়কর দিতে হয় $(5 + \frac{1}{2})$ টা. $= \frac{11}{2}$ টা. 100 টাকায়

" " " " 1 টাকা $\frac{100 \times 2}{11}$ টাকায়

" " " " 68·75 টাকা $\frac{100 \times 2 \times 68 \cdot 75}{11}$

$= 200 \times 6 \cdot 25 = 1250$ টাকায়

∴ আয়কর যোগ্য আয় = 1250 টাকা

এবং সামগ্রিক আয় = ছাড় + আয়কর যোগ্য আয়

= (5000 + 1250) টাকা

= 6250 টাকা।

উদা. 6. আয়কর যোগ্য করের হার 6% হইতে নামিয়া 5% হওয়ায় এক ব্যক্তিকে 33 টাকা কম আয়কর দিতে হয়। তাহার আয়কর যোগ্য আয় এবং সামগ্রিক আয় কত? উভয়ক্ষেত্রেই সারচার্জের পরিমাণ $\frac{1}{10}$ অংশ। করমুক্ত আয় বা ছাড় 5000 টাকা।

দেখা যাইতেছে আয়কর 100 টাকায় 1 টাকা (শতকরা 1 টাকা) কমিয়া গেল। ∴ সারচার্জও 100 টাকার $1 \times \frac{1}{10}$ টাকা $= \frac{1}{10}$ টাকা কমিয়া গেল।

∴ মোট $(1 + \frac{1}{10})$ বা $\frac{11}{10}$ টাকা কমিয়া গেল 100 টাকায়

∴ 1 " " " $\frac{100 \times 10}{11}$ টাকায়

∴ 33 " " " $\frac{100 \times 10 \times 33}{11}$

$= 3000$ টাকায়।

∴ ঐ ব্যক্তির আয়কর যোগ্য আয় 3000 টাকা

এবং সামগ্রিক আয় $= (5000 + 3000)$ টা. $= 8000$ টাকা।

উদা. 7. এক ব্যক্তিকে আয়কর যোগ্য আয়ের প্রথম 5000 টাকার জন্য 6%, পরের 5000 টাকার জন্য 8% এবং পরের 5000 টাকার জন্য 10% হারে কর দিতে হয়। করমুক্ত আয় 6000 টাকা। সারচার্জ আয়করের $\frac{1}{10}$ অংশ। তাহার মাসিক বেতন 1500 টাকা। তাহাকে কত আয়কর দিতে হইবে ?

1 মাসের বেতন 1500 টাকা

∴ 12 " " 12×1500 টাকা $= 18000$ টাকা

∴ সামগ্রিক আয় $= 18000$ টাকা

(বিয়োগ) করমুক্ত আয় $=$ 6000 "

∴ আয়কর যোগ্য আয় $= 12000$ টাকা

প্রথম 5000 টাকার উপর আয়কর নির্ণয় কর। (1)

বাকী 7000 টাকা

পরের 5000 টাকার উপর আয়কর নির্ণয় কর (2)

অবশিষ্ট 2000 টাকার " " " " (3)

(1) 100 টাকার উপর আয়কর 6 টাকা

∴ 5000 " " " $\frac{6}{100} \times 5000$ টা. $= 300$ টাকা

(2) 100 টাকার উপর আয়কর 8 টাকা

5000 " " " $\frac{8 \times 5000}{100} = 400$ টাকা

(3) 100 টাকার উপর আয়কর 10 টাকা

∴ 2000 " " " $\frac{10}{100} \times 2000$ টা. = 200 টাকা।

∴ মোট (বিভিন্ন ধাপ অনুযায়ী) আয়কর

= (300 + 400 + 200) টা. = 900 টাকা।

সার চার্জ = আয়করের $\frac{1}{10}$ অংশ = 900 টাকা × $\frac{1}{10}$ = 90 টাকা

∴ মোট আয়কর দেয় = 900 টা. + 90 টা. = 990 টাকা।

উদা. 8. 7নং উদাহরণের অঙ্কে যদি ঐ ব্যক্তির আয়ের মধ্যে 2000 টাকা ব্যাঙ্কসুদ ও কোম্পানী কাগজের লভ্যাংশ থাকে এবং বৎসরে তাহার জীবন বীমার প্রিমিয়াম ও প্রভিডেন্ট ফাণ্ডের জন্য 2000 টাকা খরচা হয়, তবে তাহাকে কত আয়কর দিতে হইবে ?

সামগ্রিক আয় = 18,000 টাকা

বিয়োগ—(ব্যাঙ্কসুদ ইত্যাদি করমুক্ত) 2000 2,000 "

16,000 "

বিয়োগ—অনুমোদিত খরচা

(জীবনবীমা ও প্রভিডেন্টফাণ্ডে জমা) 2,000 "

14,000 টাকা

[সামগ্রিক আয় আয়কর আইন অনুযায়ী]

14,000 টা.

বিয়োগ—করমুক্ত আয় 6,000 টা.

8,000 টা.

প্রথম 5,000 টাকার উপর আয়কর 300 টা.

অবশিষ্ট 3,000 " " " 240 টা.

∴ আয়কর = 540 টা. এবং

সারচার্জ = 540 × $\frac{1}{10}$ = 54 টা.

∴ মোট আয়কর = (540 + 54) টা. = 594 টাকা।

প্রশ্নমালা 10

1. টাকায় 3 পয়সা হারে 2200 টাকা আয়ের উপর কত আয়কর হয় ?

2. প্রতি টাকা আয়ের উপর 5 পয়সা আয়কর দিতে হইলে 13420 টাকা আয়ে কত আয়কর দিতে হইবে ?

3. 450 টাকা আয়ের উপর 2·5% হারে আয়কর দিয়া কত আয় থাকে ?

4. প্রতি টাকায় 4 পাই হিসাবে আয়কর দিয়া কোন ব্যক্তির 3760 টাকা থাকে। তাহার মোট আয় কত ?

5. প্রতি টাকায় 4 পয়সা হারে আয়কর দিয়া এক ব্যক্তির 480 টাকা 24 পয়সা থাকিল। তাহার মোট আয় কত ছিল ?

6. 2% হারে আয়কর দেওয়ার পর এক ব্যক্তির আয় 200 টাকা কমিয়া গেল। তাহার মোট আয় কত ছিল ?

7. প্রতি টাকায় 1 পয়সা আয়কর বৃদ্ধি হইলে এক ব্যক্তির আয়কর বাদে আয় 12 টাকা 10 পয়সা কমিয়া যায়। তাহার মোট আয় কত ?

8. আয়কর টাকা প্রতি 5 পয়সার পরিবর্তে 7 পয়সা হওয়ায় এক ব্যক্তিকে 52 টাকা 60 পয়সা বেশী আয়কর দিতে হইল। তাহার আয় কত ?

9. এক ব্যক্তির আয় 360 টাকা কমিয়া গেল, কিন্তু আয়কর টাকা প্রতি 4 পয়সা হইতে বাড়িয়া 5 পয়সা হওয়ায় তাহাকে পূর্বের সমান আয়কর দিতে হইল। প্রথমে তাহার কত আয় ছিল ?

10. 10% হারে আয়কর দিয়া এক ব্যক্তির 4050 টাকা থাকে। আয়কর 15% হইলে আয়কর দিয়া তাহার কত থাকিবে ?

11. প্রতি টাকায় 6 পয়সা আয়কর দিয়া 752 টাকা আয় থাকে। প্রতি টাকায় 5 পয়সা হারে আয়কর দিলে অবশিষ্ট আয় কত থাকিবে ?

12. এক ব্যক্তির মোট আয় 9650 টাকা। তাহার 5000 টাকা ছাড়িয়া অতিরিক্ত আয়ের উপর 10% হারে আয়কর দিতে হইল। আয়কর দিয়া তাহার কত আয় থাকিল ?

13. 1500 টাকা ছাড় দিয়া বাকী আয়ের প্রতি টাকায় $3\frac{1}{3}$ প. হারে মোট 68 টাকা আয়কর দিতে হইল। আয়কর বাদে তাহার মোট কত আয় থাকিল ?

14. প্রতি টাকায় 8 পয়সা হারে আয়কর দিয়া 552 টাকা আয় থাকে। প্রতি টাকায় 7 পয়সা হারে আয়কর দিলে অবশিষ্ট আয় কত থাকিবে ?

15. এক ব্যক্তির বার্ষিক আয় 9875 টাকার মধ্যে 2000 টাকা আয়করমুক্ত এবং আয়কর দিয়া তাঁহার 9481 টাকা 25 পয়সা থাকে। প্রতি টাকায় কত আয়কর দিতে হয় ?

16. আয়ের প্রথম 3000 টাকা আয়করমুক্ত। আয়ের অবশিষ্টাংশের উপর টাকা প্রতি 9 পাই হারে আয়কর দেওয়ায় এক ব্যক্তিকে 120 টাকা আয়কর দিতে হইল। তাঁহার মোট আয় কত এবং মোট আয়ের উপর গড়ে টাকা প্রতি কত আয়কর দিতে হইল ? [W. B. S. F. '58]

17. যদি আয়ের প্রথম 5000 টাকা আয়কর মুক্ত এবং তাহার পর 5000 টাকায় 10% হারে এবং তৎপরে 5000 টাকায় 17% হারে আয়কর হয়, তবে যে ব্যক্তির মাসিক আয় 1000 টাকা এবং যিনি নিজের জন্য বৎসরে 400 টাকা মূল্যের পুস্তক ক্রয় করেন, তাঁহাকে বৎসরে কত আয়কর দিতে হইবে ?

18. এক ব্যক্তির বার্ষিক আয় 8000 টাকা এবং তিনি বৎসরে 2160 টাকা জীবনবীমার প্রিমিয়াম দেন। আয়ের প্রথম 5000 টাকা আয়করমুক্ত এবং প্রিমিয়ামের জন্য মোট আয়ের $\frac{1}{4}$ অংশ বা 8000 টাকা (যেটি কম) আয়কর মুক্ত। 10% হারে তাঁহাকে বৎসরে কত আয়কর দিতে হয় ?

19. আয়ের প্রথম 5000 টাকা আয়করমুক্ত এবং সারচার্জ $\frac{1}{10}$ হইলে 7450 টাকা আয়ের উপর 5% হারে আয়কর দিয়া কত আয় থাকিবে ?

20. আয়কর যোগ্য প্রতি 100 টাকায় 5 টাকা হিসাবে আয়কর দিয়া এক ব্যক্তির 9252 টাকা 50 পয়সা থাকে, তাহার মোট আয় কত ? [ছাড় 5000 টাকা। সারচার্জ $\frac{1}{10}$]

21. এক ব্যক্তির মাসিক আয় 1250 টাকা। আয়ের প্রথম 6000 টাকা আয়করমুক্ত। তাহার পর 5000 টাকার উপর 10% হিসাবে এবং তাহার ঊর্ধ্বে আয়ের উপর 17% হারে বার্ষিক আয়কর হইলে, বৎসরে তাঁহাকে কত আয়কর দিতে হইবে ? সারচার্জ আয়করের $\frac{1}{10}$ দিতে হইবে।

22. আয়ের প্রথম 6000 টাকা আয়করমুক্ত। তাহার পর 5000 টাকার উপর 10% হারে এবং তদূর্ধ্ব আয়ের উপর 17% হারে এক ব্যক্তিকে মোট বৎসরে 1111 টাকা আয়কর দিতে হয়। তাঁহার বার্ষিক আয় কত ?

[সারচার্জ করের $\frac{1}{10}$ অংশ]

23. আয়কর যোগ্য করের হার 5% হইতে কমিয়া 4% হওয়ায় এক ব্যক্তিকে 49 টাকা 50 পয়সা কম আয়কর দিতে হয়। তাহার আয়কর যোগ্য আয় এবং মোট আয় কত ? উভয়ক্ষেত্রেই সারচার্জ $\frac{1}{10}$ অংশ এবং আয়ের 5000 টাকা করমুক্ত।

24. এক ব্যক্তির 1974-75 সালের আয় হইল : বেতন 10000 টাকা, বাড়ী ভাড়ার আয় 1000 টাকা এবং ব্যাঙ্কের ও কোম্পানী কাগজের সুদ 5000 টাকা। তিনি এই বৎসর 2000 টাকা জীবনবীমার প্রিমিয়াম ও 4000 টাকা নিজ প্রভিডেন্ট ফাণ্ডে জমা দিয়াছেন। তাঁহার আয়কর যোগ্য আয়ের উপর 10% হারে কত আয়কর দিতে হইবে ?

উত্তরমালা

● পাটীগণিত ●

(অষ্টম শ্রেণী)

প্রশ্নমালা 1

1. 7 2. 113
3. 315 ও 378 ; 315 ও 441 ; 378 ও 441 ; 315, 378 ও 441
4. 1 শি. 2 পে. 5. 20150 6. ,8143, 23704543
7. 17273 8. 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42
9. 2 জোড়া, 101 ও 1111, অথবা 505 ও 707
10. 97 ও 776, 194 ও 679, 388 ও 485
11. 132 ও 2376, 264 ও 1188 12. 31 ও 372, 93 ও 124
13. 16 ও 448, 64 ও 112 14. 36 ও 360, 72 ও 180
15. 121 16. 1012 17. 58
18. 3, 11, 33, 59, 177, 649, 1947 19. 1892
20. 99679 21. 100077 22. 53758063, 31663
23. 48 24. 274 25. 343, 5929 26. 29টি
28. $4\frac{1}{2}$ প. 29. 165 30. 21 জন 31. 191 32. 481

প্রশ্নমালা 2

1. 27 2. $1\frac{14}{45}$ 3. $\frac{11}{16}$ 4. $1\frac{11}{16}$ 5. $11\frac{3}{41}$
6. 2 7. 1 8. 1 9. $\frac{2}{3}$ 10. $3\frac{2}{11}$
11. A-র 50 টা., B-র 45 টা. 12. A 70 টা., B 54 টা.
13. 90 মিনিট। 14. 3 জন।

প্রশ্নমালা 3

1. $\frac{3}{22}$ 2. $\frac{1}{36}$ 3. $\frac{7}{30}$ 4. $\frac{8}{75}$ 5. $\frac{5}{18}$
6. 24 7. 10 8. $112\frac{1}{2}$ 9. 42 10. 48
11. ·8, 9·6 12. ·004, 14·4 13. ·02, 72 14. ·06, 4·8
15. ·003, ·18 16. ·05 17. 42 18. 40.

প্রশ্নমালা 4

1. 1900 2. 302 3. 579 4. 5403 5. 102
6. 13057 7. 6 8. 3 9. 3 10. 35 11. 9
12. 209 13. 62, 434 14. 36, 84 15. 97 16. 900.

প্রশ্নমালা 5

1. 8 দিন 2. $3\frac{9}{25}$ ঘ. 3. 3 দিন 4. $5\frac{3}{11}$ ঘণ্টা
5. A 3 টা. 6 প., B 4 টা. 8 প., C 1 টা. 2 প. 6. 90 দিন
7. 24 ঘ. 8. 60 ঘণ্টা 9. $14\frac{2}{7}$ দিন 10. A 30 দিন, B 90 দিন 11. 8 মিনিট 12. 15 দিন 13. 8 মি. পরে
14. 8 দিন 15. 5 টা 20 মিনিটে 16. 30 মিনিট
17. 3 ঘ. 55 মিনিট 18. 4 ঘ. 24 মিনিট 19. $40\frac{10}{11}$ দিন
20. 12 টা 20 মিনিট 21. $16\frac{4}{9}$ মিনিট।

প্রশ্নমালা 6

1. 156 টা. 25 প. 2. 437 টা. 75 প. 3. 101 টা. 4. 9000 টা.
5. $4\frac{1}{2}$% 6. $5\frac{1}{2}$% 7. 600 টা. 8. 500 টা.
9. 1600 টা., $7\frac{1}{2}$% 10. 3 ব. 11. 9 ব. 12. 12%
13. $2\frac{1}{2}$ ব. 14. $13\frac{1}{3}$ ব. 15. 8%, 600 টা. 16. 500 টা.
17. 4% 18. 3000 টা. 19. 8500 টা. 20. 13600 টাকা।

প্রশ্নমালা 7

1. 12 2. $5\frac{1}{2}$ 3. 3 4. 3·1 5. 10 টা. 25 প.
6. 5 গ্রা. 2 ডেসি গ্রা. 5 সে. গ্রা. 7. 96 সেণ্ট 8. 33 কি. লি.
9. 10 কি. মি. 617 মি. 10. $1\frac{451}{480}$ 11. $5\frac{3}{4}$ ঘ. 12. 2·525
13. 6·68 বৎসর 14. 11 15. $15\frac{1}{2}$
16. 4 মি. 20 সেকেণ্ড 17. 24637 জন 18. 10 কুই. 50 কি. গ্রা.
19. 1577 মি. 5 ডেসি মি. 20. ·54 ইঞ্চি 21. 214 জন
22. 2 টাকা 25 প. 23. 12 প. 24. 28 টা.
25. 4 ঘ. 40 মিনিট 26. ·02 সে. মি. 27. 155 মি. 25 সে. মি.
28. 30 কি. মি. 29. 7·28 ব. (আসন্ন) 30. 75
31. 32 কি. গ্রা. 32. 3 টা. 4 প. 33. 21 34. 7 মিটার
35. 326 36. 49 37. 12 ব. 38. 1·0094
39. 3000 জন 40. 1250000 41. 7 টা. 42. 1300 টা.
43. 280 জন 44. 76 প. 45. 51 বৎসর
46. 9 টা. 29 প. 47. 8 ব. 11 মাস 48. 11 কুই. 27 কি. গ্রা.
49. 80 টাকা 50. ছাগল 4 টাকা, ভেড়া 8 টাকা

51. 11 বৎসর 52. 30 টা. 53. 12·4 ব. 54. A 75টা., B 65 টা., C 55 টা. 55. 30 বৎসর 56. 1032
57. উভয়ের গড় সমান 58. আউট হইলে 112 রান, অথবা আউট না হইলে 72 রান 59. 37 60. ঘণ্টায় $17\frac{7}{9}$ কি. মি.
61. 22·2 62. 38·82 কি. গ্রা. 63. 70·35 64. 75
65. 38·73 ইঞ্চি 66. 65·6 67. 123·7 পাউণ্ড।

প্রশ্নমালা 8

1. 3·9 2. ·019 3. 1·01 4. ·024
5. 18·47 6. ·0325 7. ·0907 8. 13·057
9. 5·403 10. 54·0321 11. $\frac{5}{11}$ 12. $\frac{28}{15}$
13. $\frac{8}{13}$ 14. $\frac{32}{75}$ 15. $3\frac{1}{2}$ 16. $2\frac{5}{9}$
17. $2\frac{9}{16}$ 18. $\frac{1}{2}$ 19. $\frac{6}{7}$ 20. ·33
21. ·72 22. (1) $3\frac{1}{7}$, (2) 1·0001 23. $10\frac{18}{27}$
24. 4·242, ·471 25. ·866 26. ·534 27. ·577
28. ·632 29. 1·897 30. ·144 31. ·316
32. ·483 33. ·999 34. ·174 35. 1·4142136
36. ·5640 37. ·9999 38. 5·785 39. 1·414
40. ·0006 41. $3\frac{1}{7}$, $9\frac{3}{7}$ 42. $\frac{7}{6}$, $\frac{4}{5}$ 43. $15\frac{2}{7}$
44. $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$ 45. 13·75 মি. 46. 9·3 কি. মি.
47. 9·24 সে. মি. 48. 10·01 সে. মি. 49. 246·9 মি.
50. 2·06 51. $1\frac{1}{4}$, $2\frac{2}{5}$, $3\frac{1}{2}$ 52. 1·3, 2·4, 3·7
53. 4050 বর্গ মি. 54. $12\frac{1}{6}$ মি., $8\frac{1}{9}$ মি. 55. 72·8 মি.
56. 8 মিনিট 57. 2·64 মিটার 58. 68 মিটার
59. ·000601 60. ·000004.

প্রশ্নমালা 9

1. (*a*) (1) $2\frac{1}{2}$ ঘ., (2) 12 টা 30 মিনিটে, (3) 4 ঘ. (4) 1 ঘ. 12 মি., (5) 30 মিনিটে, (6) নৌকা উল্টা দিকে ঘণ্টায় 1 কি. মি. পিছাইবে
1. (*b*). 14 কি. মি. 2. $13\frac{1}{3}$ কি. মি. 3. 16 ঘ.
4. 91 কি. মি. 5. 18 মিনিটে 6. 40 মিনিট 7. 10 ঘ.
8. রওনা দুপুর 12টায়, পৌঁছিবে রাত্রি 7টা 30 মিনিটে। 9. 13 ঘ.

10. 90 কি. মি. 11. 8 মি. 12. ঘণ্টায় 4 কি. মি.
13. ঘণ্টায় 9 কি. মি. 680 মি. 14. 440 কি. মি.
15. 8 : 15. 16. 25 মি. 17. $20\frac{2}{3}$ কি. মি. 18. 19 মিনিটে
19. চৌকিদার 250 গজ গিয়া 20. 9 টা 44 মিনিটে
21. 3 ঘণ্টা, $37\frac{1}{2}$ কি. মিটার 22. 9 টা 24 মিনিটে
23. 45 মিনিট, 12 কি. মি. 24. 9টা $9\frac{3}{13}$ মিনিটে
25. 8 ঘ. 26. (1) 3 ঘ., (2) 9 ঘ. 27. 3 কি. মি.
28. $14\frac{1}{2}$ ঘ. 29. সেকেণ্ডে 10 মিটার 30. 240 মিটার
31. 28 মিটার 32. 5 কি. মি. 33. 440 কি. মি.
34. ঘণ্টায় 5 কি. মি. 35. ঘণ্টায় 13 কি. মি. 860 মি.
36. 8 ঘ. 55 মিনিট 37. 203 মি. 38. 2·5 কি. মি.
39. $3\frac{1}{3}$ ঘণ্টা 40. 3 ঘ. 45 মি. 41. 18 কি. মি.
42. 400 কি. মি. 43. 40 কি. মি.
44. A 6 ঘ. 15 মি., B 7 ঘ. 30 মি. 45. 9টা 15 মিনিটে
46. ঘণ্টায় A $4\frac{1}{2}$ কি. মি., B $3\frac{3}{4}$ কি. মি. 47. 48 কি. মিটার
48. 55 কিলো মিটার 49. 444 মাইল 50. $14\frac{1}{2}$ ঘ.
51. 8 মিনিট 52. (i) 7 ঘ. পরে, (ii) 2 ঘ. পরে
53. 210 কি. মি. 54. সেকেণ্ডে $\frac{5}{3}$ মি.
55. রাত্রি 1 টায়, 20 কি. মি. হাওড়া হইতে 56. ঘণ্টায় 66 কি. মিটার

প্রশ্নমালা 10

1. 66 টা. 2. 671 টা. 3. 438 টা. 75 প.
4. 3840 টা. 5. 500 টা. 25 প. 6. 1000 টাকা
7. 1210 টা. 8. 2630 টা. 9. 1800 টা.
10. 3825 টা. 11. 760 টা. 12. 9185 টা.
13. 3472 টা. 14. 558 টা. 15. 5 পয়সা
16. 5560 টা., $4\frac{20}{139}$ পাই 17. 772 টা.
18. 225 টা. 19. 7315 টা. 25 প. 20. 9500 টা.
21. 1298 টা. 22. 14000 টা.
23. 4500 টা., 9500 টা. 24. 310 টাকা।

বীজগণিত

(Algebra)

॥ অষ্টম শ্রেণী ॥

বীজগণিতের প্রক্রিয়াসমূহের চিহ্ন ও তাহাদের অর্থ :—

$+$ চিহ্ন : যোগ চিহ্ন ; $a+b$এর অর্থ a ও b সংখ্যা দুইটির যোগফল।

$-$ চিহ্ন : বিয়োগ চিহ্ন ; $a-b$এর অর্থ a হইতে bএর বিয়োগফল।

$\sim$ চিহ্ন : অন্তর চিহ্ন ; $a\sim b$এর অর্থ a ও bএর মধ্যে যেটি বৃহত্তর তাহা হইতে ক্ষুদ্রতরটির অন্তরফল।

$\times$ চিহ্ন : গুণ চিহ্ন ; $a\times b$এর অর্থ a ও bএর গুণফল।

[$a\times b$কে সাধারণতঃ ab লেখা হয়।]

[দ্রষ্টব্য : যেহেতু বীজগণিতের রাশিসমূহ নিয়ন্ত্রিত রাশি সেজন্য নিয়ন্ত্রিত রাশির গুণফল এখানে দেখান হইল :—

$(+a)\times(+b)=ab$

$(+a)\times(-b)=-ab$

$(-a)\times(-b)=ab$

$(-a)\times(+b)=-ab$]

$\div$ চিহ্ন : ভাগ চিহ্ন ; $a\div b$এর অর্থ aকে b দ্বারা ভাগ।

[$(a\div b)$কে সাধারণতঃ $\frac{a}{b}$ রূপে লেখা হয়।]

$=$ চিহ্ন : সমতার চিহ্ন ; $a=b$এর অর্থ a ও b সমান।

$\neq$ চিহ্ন : $a\neq b$এর অর্থ a ও b সমান নয়। ⎫

$>$ চিহ্ন : $a>b$এর অর্থ b অপেক্ষা a বৃহত্তর। ⎬ এইগুলি অসমতার চিহ্ন

$<$ চিহ্ন : $a<b$এর অর্থ b অপেক্ষা a ক্ষুদ্রতর। ⎭

$\nless$ চিহ্ন : $a\nless b$এর অর্থ b অপেক্ষা a ছোট নয়।

$\ngtr$ চিহ্ন : $a\ngtr b$এর অর্থ b অপেক্ষা a বড় নয়।

$\leqslant$ চিহ্ন : $a\leqslant b$এর অর্থ b অপেক্ষা a ক্ষুদ্রতর অথবা a ও b সমান কিন্তু $a\ngtr b$.

$\geqslant$ চিহ্ন : $a\geqslant b$এর অর্থ b অপেক্ষা a বৃহত্তর অথবা a ও b সমান কিন্তু $a\nless b$.

$\equiv$ চিহ্ন : $a\equiv b$এর অর্থ a ও b অভিন্ন।

$\surd$ চিহ্ন : ইহা মূলসূচক চিহ্ন ; [$\sqrt{a}$এর অর্থ aএর বর্গমূল, $\sqrt[3]{a}$এর অর্থ aএর ঘনমূল, $\sqrt[5]{a}$এর অর্থ aএর পঞ্চম মূল প্রভৃতি।]

বীজগণিত

প্রথম অধ্যায়

[পূর্ব পাঠের পুনরালোচনা]

তোমরা পূর্ব শ্রেণীতে যে সকল বিষয় শিখিয়াছ, এখানে সেইগুলির সংক্ষেপে কিছু আলোচনা করা হইতেছে।

§ 1. **সংখ্যাসূচক ও ক্রিয়াসূচক প্রতীক (বা চিহ্ন):** তোমরা শিখিয়াছ যে পাটীগণিত অপেক্ষা বীজগণিতের সংখ্যাসূচক প্রতীক আরও ব্যাপক। বীজগণিতে পাটীগণিতের 1, 2, 3, 4 প্রভৃতি সংখ্যা ছাড়াও ইংরাজী বর্ণমালার a, b, c, x, y, z প্রভৃতি অক্ষরগুলি এবং α, β, γ, θ, ϕ প্রভৃতি গ্রীক বর্ণমালার অক্ষরগুলিও সংখ্যার প্রতীকরূপে ব্যবহৃত হয়।

পাটীগণিতের ঐ সব সংখ্যার একটি করিয়া নির্দিষ্ট মান আছে। যথা, 4 টাকা বলিতে কেবল 4 এই নির্দিষ্ট সংখ্যক টাকাই বুঝায়, 4-এর কম বা বেশী কোন সংখ্যা বুঝায় না। বীজগণিতে কিন্তু যে সংখ্যাসূচক অক্ষরগুলি ব্যবহার করা হয় সেগুলির প্রত্যেকটির দ্বারা যে-কোন সংখ্যা নির্দেশ করা যায়। x টাকা বলিলে 1, 2, 3, 4 প্রভৃতি যে কোন সংখ্যক টাকা বুঝায়। সুতরাং বীজগণিতের সংখ্যা অধিকতর ব্যাপক।

ক্রিয়াসূচক চিহ্ন: যোগ চিহ্ন (+), বিয়োগচিহ্ন (−), গুণন চিহ্ন (×), ভাগচিহ্ন (÷) এইগুলিকে সাধারণ ক্রিয়াসূচক চিহ্ন বলা হয় এবং সমতা চিহ্ন (=), অসমতা চিহ্ন (>, < প্রভৃতি), সূচক চিহ্ন, মূল-সূচক চিহ্ন প্রভৃতিকেও ক্রিয়াসূচক চিহ্ন বলে। যথা,—

$a+b$এর অর্থ a-এর সহিত b যোগ কর।

$a-b$এর অর্থ a হইতে b বিয়োগ কর।

$x \times y$এর অর্থ x-কে y দ্বারা গুণ কর।

$x \div y$এর অর্থ x-কে y দ্বারা ভাগ কর।

5 অপেক্ষা 7 বৃহত্তর, সেজন্য লেখা হয় $7>5$. 5 অপেক্ষা 3 ক্ষুদ্রতর, সেজন্য সংক্ষেপে লেখা হয় $3<5$.

x^2 দ্বারা বুঝায় xএর বর্গ অর্থাৎ $x \times x$, সেইরূপ 5^2 হইল 5এর বর্গ অর্থাৎ $5 \times 5 = 25$.

আবার $\sqrt{16}$ দ্বারা 16-এর বর্গমূল বুঝায়, $\sqrt[3]{8}$ দ্বারা 8এর ঘনমূল, $\sqrt[3]{x}$ দ্বারা x-এর ঘনমূল বুঝায়।

[**দ্রষ্টব্য :** বীজগণিতে $3 \times a = 3a$ লিখি, কিন্তু দেখ পাটীগণিতে 3×2কে 32 এইরূপে লেখা যায় না। কারণ, 32 দ্বারা 3×2 বুঝায় না, ইহা দ্বারা 3 দশক 2 একক বুঝায় বলিয়া $32 = 3 \times 10 + 2$. আরও দেখ, $x \times 3$কে $3x$ লিখিতে হয়, $x3$ নহে। সেইরূপ $x \times 3 \times y$কে $3xy$ লিখিতে হয়।]

আর এক প্রকার চিহ্ন আছে তাহাকে অন্তর-সূচক চিহ্ন বলে। $\sim$ এইটি অন্তর-চিহ্ন। $a \sim b$এর অর্থ a ও bএর অন্তর, অর্থাৎ a ও bএর মধ্যে যেটি বৃহত্তর তাহা হইতে ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটিকে বিয়োগ করা।

§ 2. সংখ্যা পদ্ধতি ও নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা (Directed numbers), ধনাত্মক ও ঋণাত্মক সংখ্যা বা রাশি :

পূর্ব শ্রেণীতে তোমরা এই বিষয়ে বিস্তৃত আলোচনা পড়িয়াছ। এখানে সংক্ষেপে কিছু পুনরালোচনা করা হইতেছে।

1. পাটীগণিতে + ও − চিহ্ন দুইটির অর্থ যথাক্রমে যোগ ও বিয়োগ প্রক্রিয়া। $8+3$, ইহার অর্থ 8-এর সহিত 3 যোগ করিতে হইবে; আবার $8-3$এর অর্থ 8 হইতে 3 বিয়োগ করিতে হইবে। বীজগণিতে কিন্তু + ও − চিহ্নের অর্থ আরও ব্যাপক। ইহা উদাহরণ দ্বারা বুঝান যাইতেছে।

(1) পূর্ব-পশ্চিমগামী একটি রাস্তার ধারে দুইটি শহর A ও B; এখন যদি বলা হয় A হইতে B-র দূরত্ব 10 কি. মি. তাহা হইলে B-র

অবস্থান সম্পূর্ণ বুঝা গেল না ; কারণ B-র অবস্থান A হইতে পূর্বে
অথবা পশ্চিমে হইতে পারে। B-র অবস্থান ঠিক মত বলিতে হইলে
বলিতে হইবে A হইতে B-র দূরত্ব 10 কি.মি. পূর্বে (অথবা পশ্চিমে)।
এখানে 10 সংখ্যাটি পূর্ব (বা পশ্চিম) এই দিক্‌নির্ণায়ক কথাটি দ্বারা
নিয়ন্ত্রিত হইল। পূর্ব দিকের বিপরীত দিক্ পশ্চিম বলিয়া পূর্বদিক্‌কে
যদি + দিক্ ধরা যায়, তবে পশ্চিম দিক্‌কে − দিক্ ধরা হইবে,
সুতরাং A হইতে B-র অবস্থান +10 কি. মি. দূরে হইল। এইরূপ
C শহরটি যদি A হইতে −5 কি.মি. দূরে অবস্থিত হয়, তবে বুঝিতে
হইবে C-র অবস্থান A হইতে 5 কি.মি. পশ্চিমে। অতএব বুঝা
গেল পাটীগণিতের +5 ও −5এর অর্থ অপেক্ষা বীজগণিতের
+5 ও −5এর অর্থ ব্যাপকতর।

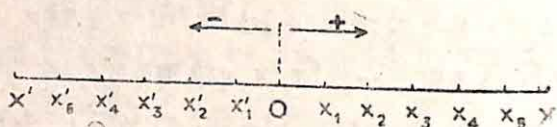
(2) উক্ত উদাহরণ হইতে বুঝা গেল কোন নির্দিষ্ট স্থান হইতে
পরস্পর বিপরীত দিকে দুইটি স্থানের অবস্থান নির্ণয় করিতে ঐ
স্থানের দূরত্বসূচক সংখ্যার পূর্বে + ও − চিহ্ন যুক্ত করিতে হয়।
এখন ঐ নির্দিষ্ট স্থানটির অবস্থানকে 0 (শূন্য) অবস্থান বলিতে
হয়।

যদি ব্যাংকে আমার জমা থাকে 1000 টাকা, তাহা হইলে বলিব
আমার +1000 টাকা আছে ; পরে যদি আমি 1000 টাকার
অতিরিক্ত 200 টাকা ব্যাংক হইতে লই, তবে ব্যাংকের নিকট আমার
দেনা হয় 200 টাকা ; এখন আমি বলিতে পারি আমার ব্যাংকে জমা
আছে −200 টাকা।

(3) যদি উপর দিক্‌কে + দিক্ ধরা হয়, তবে নীচের দিক্‌কে
− দিক্ ধরিতে হইবে। এখন যদি বলা হয় একটি বল −10 ফুট
উঠিল, তবে বুঝিতে হইবে ইহা নীচের দিকে 10 ফুট নামিয়াছে।

2. লাভ ও ক্ষতি, উত্থান ও পতন, উন্নতি ও অবনতি, উর্ধ্ব ও
অধঃ প্রভৃতি বিপরীতধর্মী রাশিগুলির একটি + রাশি বা ধনরাশি

হইলে অপরটি − রাশি বা ঋণরাশি হইবে। এইজন্য + ও − চিহ্নকে ভেদ চিহ্ন (signs of affection) বলে। পাটীগণিতে কিন্তু ভেদ চিহ্ন নাই, কারণ ইহাতে ঋণরাশির স্থান নাই। সুতরাং পাটীগণিতের সংখ্যাগুলি অনিয়ন্ত্রিত সংখ্যা। ইহাতে যে + ও − চিহ্ন ব্যবহার হয় তাহা যোগ বা বিয়োগ প্রক্রিয়ার চিহ্ন।

§ 3. **ধনরাশি ও ঋণরাশির লেখ চিত্র :**

O একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর ভিতর দিয়া X′OX একটি সরলরেখা। OX-এর উপর x_1, x_2 ইত্যাদি এবং OX′-এর উপর x'_1, x'_2 ইত্যাদি এমন সব বিন্দু যে $Ox_1 = x_1x_2 = x_2x_3 = \cdots = Ox'_1 = x'_1x'_2 = x'_2x'_3 = \cdots$। এখন OX যদি + দিক্ হয়, তবে OX′ হইবে − দিক্। $\therefore$ $Ox_1 = +a_1$ হইলে $Ox'_1 = -a_1$ হইবে; $Ox_2 = +a_2$ হইলে $Ox'_2 = -a_2$ হইবে, ইত্যাদি।

§ 4. **নিয়ন্ত্রিত রাশির যোগ ও বিয়োগ :**

যাহাতে পাটীগণিতের + ও − চিহ্নের সহিত নিয়ন্ত্রিত সংখ্যার + ও − চিহ্নের পার্থক্য নির্ণয়ে সন্দেহ না হয়, সেজন্য আপাততঃ নিয়ন্ত্রিত সংখ্যাগুলি $(+5)$, (-7) এইরূপে বন্ধনীভুক্ত করিয়া রাখা হইবে।

যোগ :—

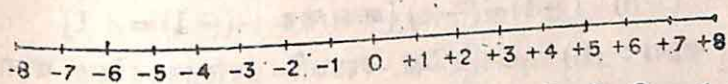
(1). $(+5)+(+1)=$ কত ?

এখানে $(+5)$ ও $(+1)$-এর মধ্যবর্তী + চিহ্নটির দ্বারা বুঝা যাইতেছে $(+5)$-এর সহিত $(+1)$ যোগ করিতে হইবে।

পরপৃষ্ঠায় অঙ্কিত স্কেলে O হইতে +5 ঘর যাইয়া আরও + 1ঘর গেলে মোট +6 ঘর যাওয়া হইল; সুতরাং $(+5)+(+1)=(+6)$.

(2). $(+5)+(-1)=$ কত ?

এখানে ০ হইতে $+5$ ঘর যাইয়া সেখান হইতে ঐদিকে আরও

-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8

(-1) ঘর যাইতে হইবে, অর্থাৎ সেখান হইতে বিপরীতদিকে 1 ঘর আসিতে হইবে, তাহা হইলে $+4$ ঘরে পৌঁছান গেল ; সুতরাং $(+5)+(-1)=(+4)$.

(3). $(-4)+(+1)=$ কত ?

০ হইতে -4 ঘর যাইয়া $+$ দিকে 1 ঘর গেলে -3 ঘরে পৌঁছান গেল। সুতরাং $(-4)+(+1)=(-3)$.

(4). $(-4)+(-1)=$ কত ?

০ হইতে -4 ঘর যাইয়া $+$ দিকে -1 ঘর অর্থাৎ $-$ দিকে আরও 1 ঘর গেলে -5 ঘরে পৌঁছান গেল। সুতরাং

$$(-4)+(-1)=(-5).$$

বিয়োগ :—

(5). $(+5)-(+1)=$ কত ?

$(+5)$ হইতে যাত্রা করিয়া বিপরীত দিকে 1 ঘর গেলে $+4$ ঘরে পৌঁছান যায়। সুতরাং $(+5)-(+1)=(+4)$ [লক্ষ্য কর $-(+1) = -1$.]

(6). $(+5)-(-1)=$ কত ?

$(+5)$ হইতে বিপরীত দিকে -1 ঘর অর্থাৎ $+$ দিকে 1 ঘর যাইয়া $+6$ ঘরে পৌঁছান যায় ;

$\therefore (+5)-(-1)=(+6)$ [লক্ষ্য কর $-(-1)=+1$]

(7). $(-5)-(+1)=$ কত ?

(-5) হইতে $-$ দিকে আরও 1 ঘর গেলে -6 ঘরে পৌঁছান যায়।

$\therefore (-5)-(+1)=(-6)$, [লক্ষ্য কর $-(+1)=-1$]

(8). $(-5)-(-1)=$ কত ?

(-5) হইতে $+$ দিকে 1 ঘর গেলে -4 ঘরে পৌঁছান যায় ;

$\therefore (-5)-(-1)=(-4)$ [লক্ষ্য কর $-(-1)=+1$]

[দ্রষ্টব্য : (i) উপরি-উক্ত কয়েকটি উদাহরণ হইতে জানা গেল $+(+1)$ এবং $-(-1)$ দ্বারা 1 ঘর $+$ দিকে এবং $-(+1)$ ও $+(-1)$ দ্বারা 1 ঘর $-$ দিকে যাওয়া বুঝায়। সুতরাং বন্ধনীমুক্ত করিলে $+(+1)=+1$;

$-(-1)=+1,\ +(-1)=-1,\quad -(+1)=-1$;

ইহাই চিহ্ন-সূচক নিয়ম।

(ii) পাটীগণিতে $5-7$এর কোন অর্থ নাই। কিন্তু সংখ্যাগুলি নিয়ন্ত্রিত হইলে অর্থাৎ $(+5)-(+7)$ হইলে ইহার অর্থ -2 হয়। সুতরাং ক্ষুদ্রতর সংখ্যা হইতে বৃহত্তর সংখ্যা বিয়োগ করিলে বিয়োগফলটি ইহাদের পরমমানের অন্তরের সহিত $-$ চিহ্নযুক্ত হইবে।

(iii) **পরমমান।** ধনরাশি ও ঋণরাশি উভয়ের চিহ্নটি বাদ দিলে যাহা থাকে তাহাই উহাদের পরমমান ; যেমন, $+5$ ও -5এর পরমমান 5, দুইটি ধনরাশির মধ্যে যাহার পরমমান বৃহত্তর সেইটিই বৃহত্তর এবং দুইটি ঋণরাশির মধ্যে যেটির পরমমান ক্ষুদ্রতর সেইটিই বৃহত্তর ; যেমন $+5>+2$ এবং $-5<-2$.

(iv) কোন পদের চিহ্ন বলিতে ইহার পূর্বে সংযুক্ত $+$ অথবা $-$ চিহ্নই বুঝাইবে, $\times$ বা $\div$ চিহ্নকে বুঝাইবে না।]

§ 5. **যোগ ও বিয়োগের সংক্ষিপ্ত নিয়ম :—**

যোগ। (1). দুইটি ধনরাশির যোগ করিতে হইলে উভয় রাশির পরমমান যোগ করিলে নির্ণেয় যোগফল হইবে এবং ইহার চিহ্ন হইবে $+$. যথা—

$(+8)+(+6)=8+6=+14=14$; $\quad (+a)+(+b)=a+b.$

(2). দুইটি ঋণরাশির যোগ করিতে হইলে উভয় রাশির পরমমান যোগ করিলে যোগফল হইবে এবং ইহার চিহ্ন হইবে $-$ ।

$$(-5)+(-3)=-(5+3)=-8,$$
$$(-a)+(-b)=-a-b=-(a+b).$$

(3). একটি ধনরাশি ও একটি ঋণরাশি যোগ করিতে হইলে বৃহত্তর পরমমান হইতে ক্ষুদ্রতর পরমমান বিয়োগ করিলে নির্ণেয় যোগফল হইবে এবং **বৃহত্তরটির চিহ্নই যোগফলের চিহ্ন হইবে।**

$$(+5)+(-3)=5-3=+2$$
$$(+5)+(-9)=-(9-5)=-4.$$

বিয়োগ। (4). যে রাশিটি বিয়োগ করিতে হইবে তাহার চিহ্ন পরিবর্তিত করিয়া অর্থাৎ $+$কে $-$ এবং $-$কে $+$ করিয়া যোগক্রিয়ার নিয়ম অনুযায়ী যাহা হইতে বিয়োগ করিতে হইবে তাহার সহিত যোগ করিলেই বিয়োগফল পাওয়া যাইবে।

$$(+6)-(+5)=(+6)+(-5)=6-5=1.$$
$$(-8)-(+5)=(-8)+(-5)=-8-5=-13.$$
$$(-9)-(-6)=(-9)+(+6)=-9+6=-3.$$

শূন্য সংখ্যা (0) : সংখ্যারেখায় O বিন্দু হইতে O বিন্দুর দূরত্ব কত জিজ্ঞাসা করিলে তুমি অবশ্যই বলিবে ঐ-দূরত্ব কিছুই নহে অর্থাৎ 0. তোমার 5 টাকা আছে। তুমি যদি 5 টাকাই খরচ কর তখন তোমার কত টাকা থাকিবে? দেখ তোমার নিকট 0 টাকা আছে। অতএব, একক বাদ দিয়া বলা যায় $5-5=0$.

$$\therefore\ 5+0=5,\ -5+0=-5$$ ইত্যাদি।

প্রশ্নমালা 1

1. **লেখচিত্র সাহায্যে মান নির্ণয় কর :—**

(i) $7-5$, (ii) $-7+5$, (iii) $0-5$, (iv) $-7+2$.

2. মান নির্ণয় কর :—

(i) $(+11)+(+7)$ (ii) $(-11)+(+7)$ (iii) $(+11)+(-7)$
(iv) $(-11)-(-7)$ (v) $(-8)+(-4)$ (vi) $(-20)+(+20)$
(vii) $(-20)-(+20)$ (viii) $(-20)-(-20)$.

3. শূন্যস্থান পূর্ণ কর :—

(i) $(+3)-(\quad)=(+8)$ (ii) $(-7)-(\quad)=0$
(iii) $(-11)+(\quad)=-8$ (iv) $(-11)+(\quad)=(+11)$.

4. মান নির্ণয় কর :—

(i) $-6-4$ (ii) $-11+8$ (iii) $-17+17$
(iv) $-11+17$ (v) $5-7+8$ (vi) $6-7+1$
(vii) $5-6-7+5$ (viii) $-3+5+3-5$.

5. এখন তাপমান 90°; কিছুক্ষণ পরে $+6^\circ$ কমিল; তখন তাপমান কত হইল ?

6. কোন দ্রব্য 75 টাকা দিয়া কিনিলাম; ইহা বিক্রয় করিয়া আমার (i) (-15) টাকা লাভ হইল, (ii) (-15) টাকা ক্ষতি হইল; আমি দ্রব্যটি কত টাকায় বিক্রয় করিলাম ?

7. এক ব্যক্তি প্রথমে 70 টাকা লাভ করে এবং পরে 75 টাকা ক্ষতি করে; তাহার কত লাভ হইল ?

8. এক ব্যক্তি পূর্বদিকে 5 কিলো মিটার যাইয়া পশ্চিমদিকে 10 কিলো মিটার গেল। সে যাত্রাস্থল হইতে কত কিলোমিটার পূর্বদিকে রহিল ? কত কিলো মিটার পশ্চিমদিকে রহিল ?

9. তোমার বাড়ী হইতে তোমার মামার বাড়ী 20 কি.মি. পূর্বে এবং বাজার 6 কি.মি. পশ্চিমে। মামার বাড়ী হইতে ঐ বাজারটি কত কিলো মিটার কোন্ দিকে ?

10. -7° হইতে 3° তাপমান কত ডিগ্রি উচ্চ ?

---

§ 6. নিয়ন্ত্রিত সংখ্যার গুণ ও ভাগ :—

(A) গুণ :—

(1). $(+6)\times(+3)=18$.

মনে কর, কোন লোক প্রতিদিন 6 টাকা সঞ্চয় করেন, তবে

3 দিনে তিনি সঞ্চয় করিবেন $(+6)+(+6)+(+6)=(+6)\times 3$
$=18$ টাকা।

$\therefore \quad (+6)\times(+3)=+18.$

(2). $(+6)\times(-3)=-18.$

লোকটি প্রতিদিন 6 টাকা সঞ্চয় করেন, -3 দিন পরে অর্থাৎ 3 দিন পূর্বে তাঁহার সঞ্চয় ছিল $(+6)+(+6)+(+6)$ বা 18 টাকা কম। $\therefore$ -3 দিনে তাঁহার সঞ্চয় $=-18$ টাকা।

$\therefore \quad (+6)\times(-3)=-18.$

(3). $(-6)\times(+3)=-18.$

লোকটি প্রতিদিন -6 টাকা সঞ্চয় করেন অর্থাৎ $+6$ টাকা ক্ষতি করেন সুতরাং 3 দিনে তাঁহার ক্ষতি হইবে $6\times 3=18$ টাকা; অর্থাৎ তাঁহার সঞ্চয় হইবে -18 টাকা। $\therefore (-6)\times(+3)=-18.$

(4). $(-6)\times(-3)=+18.$

লোকটি প্রতিদিন (-6) টাকা সঞ্চয় করেন অর্থাৎ 6 টাকা ক্ষতি করেন; -3 দিন পরে অর্থাৎ 3 দিন পূর্বে তাঁহার সঞ্চয় ছিল 6×3 বা 18 টাকা বেশী; $\therefore \quad (-6)\times(-3)=+18$

এই চারটি উদাহরণ হইতে বুঝা গেল যে, গুণ্য ও গুণকের একই চিহ্ন (উভয়েরই + অথবা উভয়েরই −) হইলে গুণফলের চিহ্ন হইবে + ; এবং উভয়ের বিভিন্ন চিহ্ন অর্থাৎ একটির +, অপরটির − চিহ্ন হইলে গুণফলের চিহ্ন − হইবে। নিম্নে সংক্ষেপে অক্ষর দ্বারা গুণনের চিহ্ন দেওয়া হইল।

দ্রষ্টব্য : $\left.\begin{array}{l}(+a)\times(+b)=+ab\\(-a)\times(-b)=+ab\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}(+a)\times(-b)=-ab\\(-a)\times(+b)=-ab\end{array}\right\}$

(B) **ভাগফলের চিহ্ন**

যেহেতু
$$\begin{array}{ll}(+5)\times(+3)=+15, \therefore & \left.\begin{array}{l}(+15)\div(+3)=+5\\(-15)\div(-3)=+5\end{array}\right\}\\(+5)\times(-3)=-15, \therefore & \\(-5)\times(+3)=-15, \therefore & \left.\begin{array}{l}(-15)\div(+3)=-5\\(+15)\div(-3)=-5\end{array}\right\}\\(-5)\times(-3)=+15, \therefore & \end{array}$$

অতএব, নিয়ম হইল এই : ভাজ্য ও ভাজকের একই চিহ্ন হইলে ভাগফলের চিহ্ন হইবে + ; এবং উভয়ের বিপরীত চিহ্ন হইলে ভাগফলের চিহ্ন হইবে −। লক্ষ্য কর, নিয়ন্ত্রিত রাশির গুণ ও ভাগ ক্রিয়ার গুণফল ও ভাগফলের চিহ্নের নিয়ম একই।

প্রশ্নমালা 2

1. মান নির্ণয় কর :—

(1) $(+3)\times(-7)$ (2) $(-7)\times(+4)$ (3) $(-8)\times(-4)$
(4) $(+4)\times(+7)$ (5) $(-16)\times(-11)$ (6) $(-9)\times 0$
(7) $0\times(-7)$ (8) $(+3)\times 0$ (9) $(-3)\times 0$
(10) $(-27)\div(+9)$ (11) $(+81)\div(-9)$
(12) $(-56)\div(-7)$ (13) $0\div(-8)$ (14) $(-60)\div(-12)$.

2. যদি $a=-2$, $b=1$, $c=0$, $x=-3$, $y=-1$ হয়, তবে নিম্ন রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :—

(1) $3a+2b-3c$ (2) $-a-b-x$ (3) $ab-3xy-by$
(4) $a^2+b^2-x^2-y^2$ (5) x^3-y^3 (6) x^2+xy+y^2
(7) a^4+x^4 (8) $-5x^2y^2b^2$ (9) $a^2b+b^2c+c^2a-xy$
(10) a^4-c^4 (11) $a^2\div x^2$
(12) $\frac{c^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}$ (13) $\frac{2ab}{a^2+b^2}$ (14) $\frac{a^3+b^3}{a+b}$.

3. যদি $a=-2, b=-1, c=-3$ হয়, তবে

$\frac{(-a)^3\times(-b)^3}{b^3+(-c)^3}\div\frac{b+c}{c^2-a^2}\times\frac{bc}{a+b}$ এর মান নির্ণয় কর।

4. যদি $a=6, b=-3, c=-1$ হয়, তবে

$\frac{1}{(b-c)(c-a)}+\frac{1}{(c-a)(a-b)}+\frac{1}{(a-b)(b-c)}$ এর মান নির্ণয় কর।

5. $x=3$ হইলে $\frac{x-1}{x-4}\div\left(\frac{1}{x}+\frac{2-x}{4-x}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

6. $a=b=c=-1$ হইলে

$\frac{a+b}{2a-b}\times\frac{b-c}{2b-c}\times\frac{c-a}{2c-a}$ এর মান নির্ণয় কর।

7. $a=-2$, $b=3$, $c=-1$ হইলে, $a^3+b^3+c^3-3abc$ এর মান কত?

§ 7. ঘাত (Power) ও সূচক (Index):

ঘাত। কোন সংখ্যাকে যদি কয়েকবার লইয়া গুণ করা যায়, তবে সেই গুণফলকে সংখ্যাটির ঘাত বলে।

মনে কর, a সংখ্যাকে 3 বার লইয়া গুণ করা হইল। $a \times a \times a$ ইহার গুণফলকে লেখা হয় a^3, সুতরাং a^3 হইল a-র ত্রিঘাত বা ঘন (cube)। $a \times a \times a \times a = a^4$, ইহা a-র চতুর্থ ঘাত,

$a \times a \times a \cdots n$ সংখ্যক বার $= a$, ইহা a-র n ঘাত।

সূচক। দেখা গেল সংক্ষেপে $a \times a \times a$কে a^3, $a \times a \times a \times a$-কে a^4 এইভাবে লেখা হয়। a-কে কয়বার লইয়া গুণ করা হইয়াছে অর্থাৎ ঘাত কত তাহা বুঝাইবার জন্য a-এর ডানদিকে একটু উপরে সেই সংখ্যাদ্বারা সূচিত করা হয়। সেজন্য উহাকে সূচক বা ঘাত-সূচক বলা হয়। a^3, a^4, a^n-এর 3, 4, n প্রভৃতি হইল a-র ঘাত-সূচক।

a-কে একবার লইলে কিন্তু সে গুণফল হয় a, ইহার ঘাত 1, কিন্তু a^1 এইরূপে ইহা লেখা হয় না। কেবল a লিখিলেই a-এর ঘাত এক বুঝাইবে।

অতএব $a, a^2, a^3, a^4, \cdots a^n$ প্রভৃতিকে যথাক্রমে a-র প্রথম ঘাত, দ্বিতীয় ঘাত বা বর্গ (square), তৃতীয় ঘাত (cube বা third power), চতুর্থ ঘাত (fourth power), n-ঘাত ইত্যাদি বলা হয়।

§ 8. সাংখ্যসহগ (Numerical coefficient):

তোমরা জান $3x$-এর দ্বারা x-কে কতবার লইয়া যোগ করা হইয়াছে তাহাই বুঝায়। এখানে 3কে x-এর সহগ বলে এবং ইহা একটি সংখ্যা বলিয়া ইহাকে সাংখ্য (বা সংখ্যা-সূচক) সহগ বলে। $4xy$-এর 4 হইল xyএর সাংখ্য সহগ। শুধু xএর দ্বারা একটি

x-কে বুঝায় বলিয়া x-এর সহগ এখানে 1, কিন্তু সহগ 1 হইলে তাহা লিখিতে হয় না।

§ 9. **রাশিমালা** (Expression): বীজগণিতে কয়েকটি পদ (term) যদি ক্রিয়াসূচক চিহ্ন + বা – দ্বারা সংযুক্ত থাকে, তবে সেই সংযোগকে রাশিমালা বলে। ইহাকে সংক্ষেপে রাশি (quantity) বলা যায়।

এই রাশিমালা **সরল** ও **মিশ্র** দুই প্রকার হইয়া থাকে। যে রাশিমালায় একটি মাত্র পদ (term) থাকে তাহাকে সরলরাশি বা একপদ রাশি (monomial) বলে। যে রাশিমালায় একাধিক পদ থাকে তাহাকে মিশ্র রাশিমালা (compound expression বা polynomial) বলে। যথা, $5a$, $3xy$ ইহারা প্রত্যেকে সরল বা একপদ রাশি। $5a+b$, $x+y$, $x+2y-3z$, এইগুলি মিশ্র রাশিমালা।

মনে রাখিবে যে $3x \div 4y \times 3z$ ইহাও কিন্তু সরল রাশি। কেবল × চিহ্ন ও ÷ চিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত থাকিলে সেই রাশিকে সরলরাশি বলা হয়।

§ 10. **সদৃশ রাশি** (Like terms) **ও অসদৃশ রাশি** (Unlike terms): যে সকল রাশিতে একই অক্ষর থাকে (তাহাদের সাংখ্য সহগ বিভিন্ন হইলেও) তাহাদিগকে সদৃশ রাশি বলে। যথা, $5a$, $9a$, a ইহারা সদৃশ রাশি।

আর যদি রাশিগুলি ভিন্ন ভিন্ন অক্ষরের সংযোগে গঠিত হয়, তবে সেগুলিকে অসদৃশ রাশি বলে। যথা, $3ab$, $2a$, $5xy$ ইহারা অসদৃশ রাশি।

§ 11. **বিনিময়, সংযোগ ও বিচ্ছেদ নিয়ম**:

(i) যোগের **বিনিময় নিয়ম** (Commutative Law): কতকগুলি রাশিকে পর পর যোগ করিলে যে যোগফল হয়, সেই

রাশিগুলিকে যে কোন প্রকারে সাজাইয়া যোগ করিলেও একই যোগফল হয়। যোগের এই নিয়মকে বলা হয় বিনিময় নিয়ম। যথা, $5+3=3+5$. সেইরূপ, $a+b+c=b+a+c=c+b+a, \cdots$

$$x+2y-z=x-z+2y=2y-z+x, \cdots$$

(ii) **যোগের সংযোগ নিয়ম** (Associative Law): কতকগুলি রাশিকে পর পর যোগ করিলে যে যোগফল হয়, উহাদিগকে ইচ্ছামত কয়েকটি করিয়া লইয়া পৃথক্ পৃথক্ দল করিয়া পৃথক্ পৃথক্ যোগ করিলেও একই যোগফল পাওয়া যায়। যথা,—

$3+5+2=(3+5)+2=(2+5)+3$;

সেইরূপ, $a+b+c=(a+b)+c=(b+c)+a=b+(c+a)$

এবং $a+b+c-d=(a+b)+(c-d)$

$=(a+c)+(b-d)=(a-d)+(b+c)$, ইত্যাদি।

(iii) **গুণনের বিনিময় নিয়ম ঃ** একাধিক রাশির গুণফল নির্ণয় করার জন্য রাশিগুলিকে ইচ্ছামত সাজাইয়া গুণ করা যায়। যথা,

$5\times3\times2=5\times2\times3=2\times3\times5$, ইত্যাদি।

$a\times b\times c=b\times a\times c=b\times c\times a=c\times b\times a$, ইত্যাদি।

সেইরূপ $x\times -y\times z=x\times z\times -y=z\times x\times -y$, ইত্যাদি

(iv) **গুণনের সংযোগ নিয়ম ঃ** কতকগুলি রাশিকে পর পর লইয়া গুণ করিলে যে গুণফল হয়, তাহাদিগকে কয়েকটি করিয়া লইয়া পৃথক্ পৃথক্ দল করিয়া লইয়া রাশিগুলিকে গুণ করিলেও একই গুণফল পাওয়া যায়। যথা,

$2\times3\times5\times6=(2\times3)\times(5\times6)=(2\times5)\times(3\times6)$ ইত্যাদি।

সেইরূপ, $x\times y\times z\times a=(x\times y)\times(z\times a)$

$=(x\times a)\times(y\times z), \cdots$ইত্যাদি।

$a\times -b\times c\times d=(a\times c)\times(d\times -b)=(a\times d)\times(-b\times c)$,

ইত্যাদি।

(v) **গুণনের বিচ্ছেদ নিয়ম ঃ** (Distributive Law): $(a+b)$কে c দ্বারা গুণ করিতে হইলে a ও bকে বিভিন্নভাবে c দ্বারা পৃথক্ পৃথক্ গুণ করিয়া সেই গুণফল দুইটি যোগ করিতে হয়। ইহাকে বলে গুণনের বিচ্ছেদ নিয়ম। অর্থাৎ $(a+b).c=ac+bc$.

প্রমাণঃ তোমরা জান $a\times 3$ ও aকে 3 বার লইয়া যোগ করার ফল একই, অর্থাৎ $a\times 3=a+a+a$.

এক্ষণে $(a+b)\times c=(a+b)+(a+b)+(a+b)+\cdots c$ সংখ্যক বার
$=(a+a+a+\ \ c$ সংখ্যক বার$)+(b+b+b+\cdots c$ সংখ্যক বার$)$
[যোগের বিনিময় ও সংযোগ নিয়মে]
$=a\times c+b\times c=ac+bc$.

অনুরূপে $(a-b).c=ac-bc$.

(vi) **ভাগের বিচ্ছেদ নিয়ম** : কোন বহুপদ রাশিকে একটি একপদ রাশিদ্বারা ভাগ করিলে যে ভাগফল হয়, ঐ রাশিমালার পৃথক্ পৃথক্ রাশি (পদ)-গুলিকে ঐ একপদ রাশিদ্বারা পৃথক্ পৃথক্ ভাগ করিয়া ভাগফলগুলির বীজগণিতীয় যোগফল লইলে একই ভাগফল পাওয়া যায়। ইহাকে ভাগের বিচ্ছেদ নিয়ম বলে। যথা,

$$(3+4+5)\div 4=3\div 4+4\div 4+5\div 4=\frac{3}{4}+1+\frac{5}{4}$$

$$=\frac{3+4+5}{4}=\frac{12}{4}=3.$$

$$\frac{x+y+z+\cdots}{a}=x\div a+y\div a+z\div a+\cdots$$

§ **12. বন্ধনী** (Brackets) : পাটীগণিতের ন্যায় বীজগণিতেও বন্ধনীর ব্যবহার হয়। এই বন্ধনী চারি প্রকার। যথা,
— ইহা রেখা বন্ধনী (vinculum), এই বন্ধনী সংখ্যাগুলির মাথায় দেওয়া হয়। যেমন, $\overline{3+5}$.

( ), { }, [ ] এই বন্ধনীগুলিকে সাধারণভাবে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় বন্ধনী বলা হয়। ইহাদিগকে যথাক্রমে লঘুবন্ধনী (parentheses), ধনুর্বন্ধনী (braces) ও গুরুবন্ধনী (crochets) বলা হয়।

ইহাদের প্রয়োগ : কয়েকটি দৃষ্টান্ত দেখ।

(i) $8-(3-4)=8-(-1)=8+1=9$,
$(8-3)-4=5-4=1$;

(ii) $4+(3+2)=4+5=9, (4+3)+2=7+2=9$;

(iii) $30\div(5\times2)=30\div10=3, (30\div5)\times2=6\times2=12$;

(iv) $4+(2\times6)=4+12=16, (4+2)\times6=6\times6=36$.

উপরের দৃষ্টান্তগুলিতে যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ প্রক্রিয়াগুলির ফল ঐ প্রক্রিয়াগুলির ক্রমের উপর নির্ভর করে। এই প্রক্রিয়াগুলির ক্রম বুঝাইবার জন্যই বন্ধনীর ব্যবহার হয়। দ্বিতীয় দৃষ্টান্তে দেখা যায় প্রক্রিয়ার ফল বন্ধনীর অবস্থানের উপর নির্ভর করে না, কিন্তু বাকি তিনটি দৃষ্টান্তে দেখ প্রক্রিয়ার ফল বন্ধনীর অবস্থান অনুসারে ভিন্ন ভিন্ন হইয়াছে।

বন্ধনীভুক্ত রাশিমালাকে একটি রাশি ধ রতে হয়।

$a-(b+c)$ দ্বারা বুঝায় প্রথমে b ও cকে যোগ করিয়া সেই যোগফলকে a হইতে বিয়োগ করিতে হইবে। পূর্বে যোগের সংযোগ নিয়ম সম্বন্ধে বলা হইয়াছে। সেই নিয়ম অনুসারে

$a+(b+c)=a+b+c,$

$a+(b-c)=a+\{b+(-c)=a+b+(-c)=a+b-c.$

উপরের দৃষ্টান্ত দুইটিতে দেখ বন্ধনীভুক্ত পদ দুইটিকে বন্ধনীমুক্ত করা হইয়াছে। ইহাকে বলে বন্ধনী অপসারণ (removal of brackets).

ইহার বিপরীতক্রমে পদগুলিকে বন্ধনীভুক্তও করা যায়। উপরের দৃষ্টান্তে $a+b+c=a+(b+c)$ এবং $a+b-c=a+(b-c)$ এইভাবে লেখা যায়।

আরও দেখ, $a-(b+c)=a-b-c$ এবং $a-(b-c)$ $=a-b+c$ হয়, ইহা তোমরা শিখিয়াছ।

অতএব নিয়ম হইল : (i) কোন বন্ধনীর পূর্বে + চিহ্ন থাকিলে বন্ধনীর অন্তর্গত পদগুলির চিহ্নের পরিবর্তন না করিয়াই বন্ধনী অপসারণ করা যায়।

আর, কোন রাশিমালার যে কোন সংখ্যক পদকে চিহ্ন পরিবর্তন না করিয়া + চিহ্নযুক্ত বন্ধনীর মধ্যে লেখা যায়। যথা, $a-b+c$

$$=a+(-b+c),\ a+b-c+d-e=a+(b-c+d-e).$$

(ii) যদি বন্ধনীর পূর্বে − চিহ্ন থাকে, তবে বন্ধনীভুক্ত পদগুলির প্রত্যেক চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া বন্ধনী অপসারণ করিতে হয়। যথা, $a-(b+c)=a-b-c,\ a-(b-c)=a-b+c.$

বিপরীতক্রমে, কোন রাশিমালার যে কোন সংখ্যক পদকে − চিহ্নপূর্বক বন্ধনীভুক্ত করিতে হইলে প্রত্যেকটি পদের চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া বন্ধনীভুক্ত করা যায়। যথা, $x-y-z=x-(y+z).$

[**দ্রষ্টব্য :** চিহ্ন পরিবর্তনের অর্থ + চিহ্নকে − চিহ্নে এবং − চিহ্নকে + চিহ্নে পরিবর্তন করা।]

বিভিন্ন বন্ধনীভুক্ত রাশিমালাকে সরল করিতে হইলে রেখা বন্ধনী, প্রথম, দ্বিতীয় ইত্যাদি পর্যায়ক্রমে বন্ধনী অপসারণ করিতে হয়। সর্বাপেক্ষা ভিতরের বন্ধনী হইতে কার্য করিতে হয়।

উদাহরণ 1. সরল কর : $-2+\{-(-\overline{1-a}+2)\}.$

রাশিটি $=-2+\{-(-1+a+2\}$ [রেখা বন্ধনী অপসৃত]

$=-2+\{+1-a-2\}$ [প্রথম বন্ধনী অপসৃত]

$=-2+1-a-2$ [দ্বিতীয় বন্ধনী অপসৃত]

$=-4+1-a=-3-a.$

উদা. 2. সরল কর : $3x-[4y+\{z-(x+y-2z)\}].$

রাশিটি $=3x-[4y+\{z-x-y+2z\}]$

$=3x-[4y+z-x-y+2z]$

$=3x-4y-z+x+y-2z$

$=(3x+x)+(-4y+y)-(z+2z)$

$=4x-3y-3z.$

প্রশ্নমালা 3

সরল কর :—

1. $7-\{6+(4-a)\}$
2. $a-\{a-(a-1)\}$
3. $-[2+\{-(-2-\overline{2-a})\}]$
4. $1-[a+3\{b-c(2-b)-\overline{1+b}\}]$
5. $2x-[3y+5z+\{-3x-(2y-3z)\}]$
6. $3a+(4b-c)-[\overline{2a-3b}-\overline{2c-4a}-5a]$
7. $4x-[5y-\{-y+(3x-\overline{x+y})\}]$
8. $\{a-(2b+c)\}+\{b-(2c+a)\}+\{c-(2a+b)\}$
9. $[x-\overline{y+z}-\overline{2y+z}-\{x+2z-(y-2x)\}-3x]$
10. $\{x+(x-1)\}, \{x-(x-1)\}, [x+\{x-(x-1)\}]$ সমষ্টি নির্ণয় কর।
11. a-র মান কত হইলে $3a-[1+a+\{1-(1+\overline{1-a})\}]$ এর মান 17 হইবে ?
12. $\{x+2(x-1)\}, \{x-3(x-1)\}, [x+4\{x-(x-1)\}]$ এই রাশি তিনটির সমষ্টি কত ?
13. যদি $a=5$, $b=2$ ও $c=-2$ হয়, তবে $2a-[5b+\{c-(a+b-2c)\}]-\overline{4b-c}$ রাশিটির মান কত ?
14. $3a-(b-c)$ হইতে $-2a-(a-\overline{b-c})$ বিয়োগ কর।
15. $2a-\overline{3b-c}$ হইতে কোন্ রাশি বিয়োগ করিলে $a-(2c+b)$ হইবে ?
16. সরল কর : $\dfrac{16x-12}{4}-\overline{x+2}-\left(\dfrac{12-9x}{3}-\dfrac{5x-10}{5}\right)$.

---

§ 13. বহুপদরাশির যোগ, বিয়োগ, গুণ (দ্বিপদ রাশিদ্বারা) এবং ভাগ (একপদ রাশিদ্বারা) তোমরা পূর্ব শ্রেণীতে শিখিয়াছ। এখানে কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইতেছে পুনরালোচনার জন্য।

(i) যোগ : $3x^2-4xy+2yz$, $4xy+5yz-2x^2$ ও $x^2-5xy-3yz+x$ এর সমষ্টি কত ?

$$\begin{array}{lrrrr}
\text{প্রথম রাশি} & 3x^2 & -4xy & +2yz & \\
\text{দ্বিতীয় রাশি} & -2x^2 & +4xy & +5yz & \\
\text{তৃতীয় রাশি} & x^2 & -5xy & -3yz & +x \\
\hline
\text{সমষ্টি} = & 2x^2 & -5xy & +4yz & +x.
\end{array}$$

(ii) **বিয়োগ :** তোমরা জান যে, যে-রাশি হইতে বিয়োগ করা হয় তাহাকে **বিয়োজন** এবং যাহা বিয়োগ করা হয় তাহাকে **বিয়োজ্য** বলে। আরও শিখিয়াছ যে 5 হইতে 3 বিয়োগ করিলে যাহা হয় 5এর সহিত +3এর বিপরীত সংখ্যা −3 যোগ করিলেও তাহাই হয়, 6 হইতে −2 বিয়োগ করা ও 6এর সহিত −2এর বিপরীত সংখ্যা +2 যোগ করার একই ফল হয়। অতএব, বিয়োজ্যের প্রত্যেক পদের চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া বিয়োজনের প্রত্যেক সদৃশ রাশির সহিত যোগ করিলেই বিয়োগ ফল পাওয়া যায়।

উদাহরণ 1. $12a^2-5ab+6b^2+c^2$ হইতে $5a^2-4ab+c^2-b^2+bc$ বিয়োগ কর।

$$12a^2-5ab+6b^2+c^2 \quad (\text{বিয়োজন})$$
$$5a^2-4ab-b^2+c^2+bc \quad (\text{বিয়োজ্য})$$
$$-\quad+\quad+\quad-\quad-$$

বিয়োগফল $=7a^2-ab+7b^2 \quad -bc$

(iii) **গুণন :** তোমরা গুণনের বিনিময়, সংযোগ ও বিচ্ছেদ নিয়ম শিখিয়াছ। এখন গুণনের **সূচক নিয়ম** দেখান হইতেছে।

তোমরা জান $x^3=x\times x\times x$, $x^2=x\times x$.

$\therefore\ x^3\times x^2=(x\times x\times x)\times(x\times x)=x\times x\times x\times x\times x$ (সংযোজন নিয়ম)

$$=x^5=x^{3+2}.$$

অতএব, দেখা গেল যে x^3 ও x^2এর গুণফলে xএর ঘাত 3+2 অর্থাৎ 5 হইয়াছে। সাধারণভাবে বলা যায় $a^m\times a^n=a^{m+n}$ হইবে, যেখানে m ও n দুইটি অখণ্ড ধনসংখ্যা।

প্রমাণ : $a^m=a\times a\times a\times a\times\cdots m$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত এবং $a^n=a\times a\times a\times\cdots n$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত ;

$\therefore\ a^m\times a^n=(a\times a\times a\times a\times\cdots m$ সংখ্যক উৎপাদক$)\times$
$(a\times a\times a\times\cdots n$ সংখ্যক উৎপাদক$)$
$=a\times a\times a\times a\times a\times a\times\cdots(m+n)$ সংখ্যক উৎপাদক
$=a^{m+n}$.

অতএব, দেখা গেল যে, বিভিন্ন ঘাতবিশিষ্ট কোন রাশির সূচক-গুলির সমষ্টি গুণফলে ঐ রাশির সূচক হইয়া থাকে। ইহাকেই গুণনের সূচক নিয়ম বলে। অনুরূপে m, n, p অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে $a^m \times a^n \times a = a^{m+n+p}$ হয়।

আবার দেখ, m ও n অখণ্ড ধনরাশি হইলে $(a^m) = a^m$ হয়।

প্রমাণ : $(a^m) = a^m \times a^m \times a^m \times \cdots n$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$= a^{m+m+m+\cdots n \text{ সংখ্যক বার}}$

$= a^{mn}$.

[দ্রষ্টব্য : a বা x এক একটি রাশি, ইহাদের কোন সূচকের উল্লেখ নাই। এখানে a বা xএর সূচক 1, সূচক 1কে লিখিতে হয় না।]

উদাহরণ 1. $3x^2, 2x^3, 4x^6$এর গুণফল কত ?

এখানে $3x^2 \times 2x^3 \times 4x^6 = 3 \times 2 \times 4 \times x^2 \times x^3 \times x^6$

$= 24x^{2+3+6} = 24x^{11}$.

উদা. 2. $2a^3 + 3b^2 - 5ac$কে $a^2 +$ ^{2} দ্বারা গুণ কর।

$2a^3 + 3b^2 - 5ac$ (গুণ্য)

$a^2 + b^2$ (গুণক)

$2a^5 + 3a^2b^2 - 5a^3c$ (a^2 দ্বারা গুণন)

$+ 2a^3b^2 + 3b^4 - 5ab^2c$ (b^2 দ্বারা গুণন)

∴ গুণফল $= 2a^5 + 2a^3b^2 - 5a^3c + 3a^2b^2 - 5ab^2c + 3b^4$.

উদা. 3. $x^2 + xy + y^2$কে $x - y$ দ্বারা গুণ কর।

$x^2 + xy + y^2$

$x - y$

$x^3 + x^2y + xy^2$ [x দ্বারা গুণন

$- x^2y - xy^2 - y^3$ [$-y$ দ্বারা গুণন]

$x^3 + 0 + 0 - y^3$

∴ গুণফল $= x^3 - y^3$

[লক্ষ্য কর যে গুণনে কেবল সদৃশ রাশির সূচকগুলিই যোগ করা হয়। x^2কে y^2 দ্বারা গুণ করিলে সূচক দুইটি যোগ করা যাইবে না, সুতরাং $x^2 \times y^2 = x^2y^2$ হইবে।]

দ্রষ্টব্য : কোন সংখ্যা বা রাশিকে 0 দ্বারা গুণ করিলে গুণফল 0 হয়। যথা, $a\times 0=0,\ 0\times a=0,\ 0\times 0=0.$

প্রমাণ : $a\times 0=a\times(b-b)=ab-ab=0$;

$0\times a=(b-b)\times a=ab-ab=0.$

অনুরূপে $0\times 0=0.$

কোন রাশিকে 0 দ্বারা ভাগ করার কোন অর্থ হয় না। মনে কর xকে 0 দ্বারা ভাগ করায় y ভাগফল হইল। অতএব, নিয়ম অনুসারে $x=0\times y$ হইবে, কিন্তু 0 ও যে কোন সংখ্যার গুণফল 0 হয়। $\therefore$ এখানে $x=0$ না হইলে ইহা সত্য হয় না। এখানে যদি $x=0$ হয়, তবে ভাগফল y যে-কোন সংখ্যা হইবে। কারণ, $0\times$ যে-কোন সংখ্যা $=0$. $\therefore 0\div 0=$ যে-কোন সংখ্যা হইতে পারে। সেজন্য 0 দ্বারা ভাগের কোন অর্থ হয় না এবং ভাগফল এখানে অনির্দিষ্ট।

(iv) **ভাগ।** ভাগের সূচক নিয়ম এই যে ভাজ্যের a-র সূচক হইতে ভাজক a-র সূচক বিয়োগ করিয়া ভাগফলের a-র সূচক পাওয়া যায়। যথা, $a^5\div a^3=a^{5-3}=a^2$.

অনুরূপে, $a^m\div a^n=a^{m-n}$, যেখানে m ও n অখণ্ড ধনরাশি এবং $m>n$.

প্রমাণ : $\because a^{m-n}\times a=a^{m-n+n}$ [গুণনের সূচক নিয়মে]

$$=a\ ,$$

$$\therefore a\ \div a^n=a^{m-n}.$$

উদাহরণ 1. $21x^3y^4$কে $3xy^2$ দিয়া ভাগ কর।

$$21x^3y^4\div 3xy^2=7x^{3-1}\,y^{4-2}=7x^2y^2.$$

উদা. 2. $a^3b^2c+ab^3c^2-ab^2c^3$কে abc দ্বারা ভাগ কর।

$$
\begin{array}{r|l}
abc & a^3b^2c+ab^3c^2-ab^2c^3\,(a^2b+b^2c-bc^2 \\
 & \underline{a^3b^2c} \\
 & ab^3c^2 \\
 & \underline{ab^3c^2} \\
 & -ab^2c^3 \\
 & \underline{-ab^2c^3}
\end{array}
$$

$\therefore$ ভাগফল $=a^2b+b^2c-bc^2$.

প্রশ্নমালা 4

যোগফল নির্ণয় কর :—

1. $3x^2-4xy+5y^2, 2x^2+3xy-3y^2$ ও $-4x^2+xy+2y^2$.
2. $a^2-b^2, b^2-c^2, c^2-a^2$.
3. $4a^3+3a^2-9a+5, -a^3+2a^2+4a-1$ ও $6a^3-a^2+7a-3$.
4. $\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}xy+\frac{1}{3}y^2+x, x^2+\frac{1}{3}xy+\frac{2}{3}y^2$ এবং $\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}xy+y^2$
5. সরল কর : $5(a^2-ab+b^2)+3(a^2+ab+b^2)-2(2a^2+ab+b^2)$.
6. যদি $x=a^2-ab+b^2, y=2a^2-2ab+3b^2$ এবং $z=-a^2+ab+2b^2$ এবং $a=2$ ও $b=3$ হয়, তবে $x+y+z$-এর মান কত ?

বিয়োগ কর (প্রথমটি হইতে দ্বিতীয়টি) :

7. $5a^3+4a^2-3a+5, 2a^3-a^2+5a+2$.
8. $a^2-ab+b^2+c^2, 2a^2-3ab+2b^2-c^2$.
9. $6x^4+5x^3+4x^2+x, 2x^4+2x^3-x^2+2x-5$.
10. $\frac{2}{3}a^4-\frac{1}{4}a^3+\frac{1}{5}a^2+a, a^4-\frac{1}{2}a^3-\frac{4}{5}a^2+\frac{1}{3}a-4$.
11. 0 হইতে কত বিয়োগ করিলে $2x^2-3xy+y^2$ হইবে ?
12. $2xy-17x^2+4yz$ হইতে কত বিয়োগ করিলে $-xy-19x^2-y^2$ হয় ?
13. দুইটি রাশির সমষ্টি $13a^3+5a^2-4a+1$, একটি রাশি $3a^3+2a^2-a+2$ হইলে অন্যটি কত ?

গুণফল নির্ণয় কর :—

14. $a^2+ab+b^2, a-b$.
15. $4x^2+6xy+9y^2, 2x-3y$.
16. $3a^3+4a^2+5a+1, 2a^2-3a$.
17. $\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}xy+y^2, 2x-\frac{1}{2}y$.
18. $x+y. x-y, x^2+y^2$.
19. $1+a, 1-a, 1+a^2, 1+a^4$.
20. সরল কর : $(a^2+5a)(a-1)-(a^2+2a)(a-1)+3a(a+1)$.
21. $(1+a+a^2), (1-a+a^2)$ ও $(1-a^2+a^4)$-এর ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর।

ভাগফল নির্ণয় কর : (প্রথমটি ভাজ্য, দ্বিতীয়টি ভাজক) :—

22. $4x^2yz-3xy^2z+5xyz^2, xyz$,
23. $9a^3b^2c+6a^2b^3c+21abc^3, -3abc$.

24. $10a^4b^2-5a^3b^3+15a^2b^2-5ab$, $-5ab$.

25. কোন্ রাশিকে $2xyz$ দ্বারা গুণ করিলে গুণফল $6x^2yz+4xy^2z-8xyz^2$ হয় ?

26. গুণক $-2ac$ এবং গুণফল $-6a^3c+8ab^2c+10ac^3$ হইলে গুণ্য কত ?

---

§ 14. তোমরা নিম্নের সূত্রগুলি পূর্বেই শিখিয়াছঃ

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

(2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(3) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

এখন এইগুলির প্রয়োগ সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে।

উদাহরণ 1. $(a+b+c)$এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(a+b+c)^2=\{(a+b)+c\}^2=(a+b)^2+2(a+b).c+(c)^2$$
$$=a^2+b^2+2ab+2ac+2bc+c^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac.$$

উদা. 2. $(x+2y-z)^2=\{(x+2y)-z\}^2$
$$=(x+2y)^2-2(x+2y)z+(-z)^2$$
$$=x^2+2.x.\,2y+(2y)^2-2xz-4yz+z^2$$
$$=x^2+4y^2+z^2+4xy-2xz-4yz.$$

উদা. 3. সরল করঃ

$$(2a+3b)^2-2(2a+3b)(2a-3b)+(2a-3b)^2$$

মনে কর $x=2a+3b$ এবং $y=2a-3b$.

রাশিটি $=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$
$$=\{(2a+3b)-(2a-3b)\}^2 \text{ [} x \text{ ও } y\text{এর মান বসাইয়া]}$$
$$=(2a+3b-2a+3b)^2$$
$$=(6b)^2=36b^2.$$

উদা. 4. যদি $x+y=9$ ও $xy=12$ হয়, তবে x^2+y^2এর মান কত হইবে ?

সূত্র 1 হইতে পাওয়া যায়, $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$.

এক্ষণে, $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(9)^2-2\times 12$
$=81-24=57.$

উদা. 5. $x-y=5$ ও $xy=9$ হইলে, x^2+y^2এর মান কত ?

সূত্র 2 হইতে পাই $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab.$
এক্ষণে, $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=(5)^2+2\times 9$
$=25+18=43.$

উদা. 6. $x-\frac{1}{x}=4$ হইলে $x^2+\frac{1}{x^2}$এর মান কত ?

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2x\times\frac{1}{x}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$$
$$=(4)^2+2=16+2=18.$$

প্রশ্নমালা

বর্গ নির্ণয় কর :—

1. $2x+3y$
2. $a-b+2c$
3. $2x-y+3z$
4. $\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b$
5. $1+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$.

সরল কর :—

6. $25x^2-10x(5x-y)+(5x-y)^2$
7. $(3a-2b)^2+(6a-4b)(a+2b)+(a+2b)^2$
8. $a=2, b=-3$ ও $c=-2$ হইলে $(3a+2b+c)^2$ $+(a-b+2c)^2$এর মান কত ? $-2(3a+2b+c)(a-b+2c)$
9. $4x^2+81y^2$এর সহিত কত ধনাত্মক রাশি যোগ করিলে যোগফল একটি পূর্ণবর্গ হইবে ?
10. $9a^2+25b^2$ হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফল পূর্ণবর্গ হইবে ?
11. $a+b=9$ ও $a^2-b^2=27$ হইলে ab-র মান কত ?
12. $x+y=8$ ও $xy=15$ হইলে $x-y$এর মান কত ?
13. $a-b=2$ এবং $ab=8$ হইলে $a+b$এর মান কত ?
14. $a+b=13$, $ab=40$ এবং $a>b$ হইলে a^2-b^2এর মান কত
15. $2a+3b=9$ ও $ab=3$ হইলে $4a^2+9b^2$এর মান কত ?

16. $x+y=8$, $xy=15$ এবং $x>y$ হইলে x ও yএর মান নির্ণয় কর

17. $a+\frac{1}{a}=3$ হইলে $a^2+\frac{1}{a^2}=$কত ?

18. $p-\frac{1}{p}=4$ হইলে $p^2+\frac{1}{p^2}$এর মান কত ?

19. $x+y+z=9$ এবং $x^2+y^2+z^2=31$ হইলে $xy+yz+zx$এর মান নির্ণয় কর। [S. F. '52]

20. যদি $(a+b)^2=100$ এবং $(a-b)^2=4$ হয়, তবে ab-র মান কত ?

21. $x+y+z=13$ এবং $xy+yz+zx=50$ হইলে $x^2+y^2+z^2$ এর মান কত ?

22. $x+\frac{1}{x}=c$ হইলে $x^2+\frac{1}{x^2}$এর মান কত হইবে ?

---

§ 15. সূত্র $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$এর প্রয়োগে উৎপাদক নির্ণয় করিতে তোমরা পূর্ব শ্রেণীতে শিখিয়াছ।

a^2-b^2কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইলে সূত্রটি প্রয়োগ করা যাইবে না।

$$a^2-b^2=a^2+ab-ab-b^2=(a^2+ab)-(ab+b^2)$$
$$=a(a+b)-b(a+b)=(a+b)(a-b).$$

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

উদাহরণ 1. $25a^2-16b^2=(5a)^2-(4b)^2$
$$=(5a+4b)(5a-4b).$$

উদাহরণ 2. $x^2+y^2-z^2+2xy$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

রাশিটি $=x^2+y^2+2xy-z^2=(x+y)^2-(z)^2$
$$=(x+y+z)(x+y-z).$$

উদাহরণ 3. $4(a+b)^2-9(c+d)^2$এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$a+b=x$ এবং $c+d=y$ ধরিয়া

রাশিটি $=4x^2-9y^2=(2x)^2-(3y)^2$
$$=(2x+3y)(2x-3y)$$
$$=(2a+2b+3c+3d)(2a+2b-3c-3d).$$

দ্রষ্টব্য : অনেক ক্ষেত্রে রাশিটি দুইটি পূর্ণ বর্গের অন্তররূপে না থাকিলেও উহাকে a^2-b^2 আকারে পরিণত করা যায়। রাশিটির সহিত কিছু যোগ ও বিয়োগ করিয়া এরূপ করা যায়।

উদা. 4. x^4+4y^4কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এখানে রাশির পদ দুইটি পূর্ণবর্গ হইলেও a^2-b^2 আকারে নাই। এখন দেখ কিরূপে ইহাকে ঐ আকারে পরিণত করা যায়।

$$x^4+4y^4=(x^2)^2+(2y^2)^2+2.x^2.2y^2-2.x^2.2y^2$$
$$=(x^2+2y^2)^2-4x^2y^2=(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2$$
$$=(x^2+2y^2+2xy)(x^2+2y^2-2xy).$$

উদা. 5. a^4+a^2+1-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$\text{রাশিটি}=(a^2)^2+2.a^2.1+(1)^2-a^2=(a^2+1)^2-(a)^2$$
$$=(a^2+1+a)(a^2+1-a)$$
$$=(a^2+a+1)(a^2-a+1).$$

প্রশ্নমালা 6

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :—

1. $81a^2-64b^2$ 2. $27a^2-3b^2$ 3. x^4+4
4. a^4-b^4 5. $4a^4+1$ 6. $4a^2-(b+c)^2$
7. $9(a+b)^2-4c^2$ 8. $a^2-b^2+2bc-c^2$ [C. U. '35]
9. $4x^2-4xy-2yz-z^2$
10. a^2-b^2+2a+1 11. $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$
12. $4x^4+1$ 13. x^4+64 14. $4a^4+81b^4$
15. $a^2-b^2+4bc-4c^2$ [S. F. '55]
16. x^4+x^2+1 [S. F. '57] 17. $20a^2-45b^2$
18. $x^2-4(y^2-x-1)$ [S. F. '63]
19. $a^2-b^2+6bc-9c^2$ [S. F. '68] 20. a^8+a^4+1
21. a^8-b^8 22. $a^4-23a^2b^2+b^4$
23. $x^4+x^2y^2+y^4$ 24. $a^2b^2-a^2-b^2+1$ [S. F. '72]
25. $a^2-b^2-c^2+d^2+2(bc+ad)$.

§ 16. সরল সমীকরণসাধ্য প্রশ্নাবলী

[পুনরালোচনা]

তোমরা পূর্বশ্রেণীতে শিখিয়াছ যে প্রত্যেক প্রশ্নেই যেটি নির্ণেয় অর্থাৎ অজ্ঞাত রাশি তাহাকে x ধরিয়া প্রশ্নানুযায়ী বিভিন্ন শর্তের xএর সহিত সম্বন্ধ নির্ণয় করিলে একটি সমীকরণ গঠিত হইবে এবং সমীকরণটির সমাধান করিলে x-এর মানই প্রশ্নটির উত্তর হইবে।

উদাহরণ 1. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 42 এবং ক্ষুদ্রতরটির 5 গুণ বৃহত্তরটির দ্বিগুণের সমান। সংখ্যা দুইটি কত ?

মনে কর ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটি x, সুতরাং বৃহত্তর সংখ্যাটি $(42-x)$.

এক্ষণে, শর্ত অনুসারে $5x=2(42-x)$,

বা, $5x=84-2x$, বা, $5x+2x=84$, বা, $7x=84$,

$\therefore \quad x=\frac{84}{7}=12.$

$\therefore$ ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটি 12 এবং অপরটি $(42-12)$ বা 30.

উদাহরণ 2. তিনটি ক্রমিক সংখ্যার মধ্যের সংখ্যার 6 গুণের সহিত বৃহত্তম সংখ্যাটির 4 গুণ যোগ করিলে 84 হয়। সংখ্যা তিন নির্ণয় কর।

মনে কর $x-1$, x, $x+1$ তিনটি ক্রমিক সংখ্যা। অতএব বৃহত্তম সংখ্যাটি $x+1$.

শর্তানুসারে $6x+4(x+1)=84$,

বা, $6x+4x+4=84$, বা, $10x=84-4=80$,

$\therefore \quad x=8.$

অতএব, সংখ্যা তিনটি $8-1, 8, 8+1$ অর্থাৎ 7, 8, 9.

উদাহরণ 3. পিতার বয়স বর্তমানে পুত্রের বয়সের 4 গুণ। 4 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 5 গুণ ছিল। বর্তমানে পিতা ও পুত্রের বয়স কত ?

মনে কর বর্তমানে পুত্রের বয়স x বৎসর, সুতরাং পিতার বয়স $4x$ বৎসর। 4 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স ছিল $4x-4$ এবং পুত্রের বয়স ছিল $x-4$ বৎসর

$\therefore$ শর্তানুসারে $4x-4=5(x-4)$, বা, $4x-4=5x-20$,
বা, $20-4=5x-4x$, বা, $x=16$.

অতএব, বর্তমানে পিতার বয়স 16×4 বা 64 বৎসর এবং পুত্রের বয়স 16 বৎসর।

উদাহরণ 4. এক ব্যক্তি 7 ঘণ্টায় 75 কিলোমিটার গিয়াছে। সে কিছুদূর ঘণ্টায় 12 কি. মিটার বেগে এবং বাকি পথ ঘণ্টায় 10 কি. মিটার বেগে গিয়াছে। সে প্রথম ও দ্বিতীয় বেগে কতটা করিয়া পথ গিয়াছে?

মনে কর, সে প্রথম বেগে x কি. মি. গিয়াছে, সুতরাং দ্বিতীয় বেগে $75-x$ কি.মি. গিয়াছে।

ঘণ্টায় 12 কি.মি. বেগে x কি.মি. যাইতে সময় লাগে $\frac{x}{12}$ ঘণ্টা এবং বাকি পথ 10 কি.মি. বেগে যাইতে সময় লাগে $\frac{75-x}{10}$ ঘণ্টা।

$\therefore$ শর্তানুসারে $\frac{x}{12}+\frac{75-x}{10}=7$, এখন উভয়পক্ষকে 12 ও 10-এর ল. সা. গু. 60 দ্বারা গুণ করিয়া পাই
$5x+450-6x=7\times 60$, বা, $-x=420-450$,
বা, $-x=-30$, $\therefore$ $x=30$.

অতএব, সে প্রথম বেগে 30 কি.মি. এবং দ্বিতীয় বেগে $(75-30)$ বা 45 কি. মিটার গিয়াছে।

প্রশ্নমালা 7

1. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 42 এবং ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটির 4 গুণ বৃহত্তর সংখ্যাটির 3 গুণের সমান। সংখ্যা দুইটি কত?

2. 75কে এমন দুই ভাগে বিভক্ত কর যেন ছোটটির 3 গুণ বড়টির দ্বিগুণের সমান হয়

3. তিনটি ক্রমিক সংখ্যার সমষ্টি 336 ; সংখ্যা তিনটি কত ?

4. তিনটি ক্রমিক সংখ্যার বৃহত্তম সংখ্যাটির দ্বিগুণ ও ক্ষুদ্রতম সংখ্যাটির 4 গুণের সমষ্টি 70 ; সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

5. কোন সংখ্যার 5 গুণ পরবর্তী সংখ্যাটির 4 গুণ অপেক্ষা 11 বেশী। সংখ্যা দুইটি কত ?

6. কোন্ সংখ্যার $\frac{1}{4}$ অংশের সহিত উহার $\frac{1}{5}$ অংশ যোগ করিলে 234 হয় ?

7. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 156 এবং অন্তর 12, সংখ্যা দুইটি কত ?

8. 192কে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন একটি অংশ অন্যটির দ্বিগুণ হয়।

9. পিতার বয়স বর্তমানে পুত্রের বয়সের 3 গুণ এবং 5 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 4 গুণ ছিল। পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়স কত ?

10. পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ। 5 বৎসর পূর্বে উভয়ের বয়সের সমষ্টি ছিল 65 বৎসর। বর্তমানে কাহার বয়স কত ?

11. একটি বালকের 3 বৎসর পূর্বে যত বয়স ছিল, 6 বৎসর পরে তাহার দ্বিগুণ বয়স হইবে। তাহার বর্তমান বয়স কত ?

12. তোমার 36 টাকা ও তোমার বোনের 28 টাকা আছে। তুমি বোনকে কত টাকা দিলে বোনের টাকা তোমার টাকার 3 গুণ হইবে ?

13. 104 টাকা A ও Bকে এরূপে ভাগ করিয়া দাও যে A যতবার 5 টাকা পাইবে, B ততবার 3 টাকা পাইবে।

14. A ও Bকে 180 টাকা এরূপে ভাগ করিয়া দাও যে A যতবার 50 পয়সা পাইবে, B ততবার 25 পয়সা পাইবে। কে কত টাকা পাইবে ?

15. কোন্ সংখ্যার $\frac{4}{15}$ অংশ অপেক্ষা $\frac{7}{15}$ অংশ 24 বেশী ?

16. কোন ভগ্নাংশের লব অপেক্ষা হর 3 অধিক। লব ও হর হইতে 1 বিয়োগ করিলে ভগ্নাংশ $\frac{1}{2}$ হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

17. কোন ভগ্নাংশের হর অপেক্ষা লব 1 কম। হরে 2 যোগ করিলে ভগ্নাংশটি $\frac{2}{3}$ হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

18. কোন আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ অপেক্ষা দৈর্ঘ্য 2 মিটার বেশী। উহার পরিসীমা 68 মিটার হইলে, উহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

19. একটি গরু ও একটি ঘোড়ার মোট মূল্য 800 টাকা। ঘোড়ার মূল্যের 3 গুণ গরুর মূল্যের 5 গুণের সমান। প্রত্যেকটির মূল্য কত ?

20. এক ব্যক্তি 4 ঘণ্টায় মোট 71 কি.মি. গেল। সে কিছুদূর ঘণ্টায় 4 কি.মি বেগে হাঁটিয়া এবং বাকি পথ ঘণ্টায় 24 কি.মি. বেগে গাড়ীতে গিয়াছিল। সে হাঁটিয়া কত দূর গিয়াছে ?

§ 17. সরল অসমীকরণ (Simple Inequation) :

[পুনরালোচনা]

1. যদি দুইটি রাশি সমান হয়, তবে তাহাদের মধ্যে সমতা (equality) বিদ্যমান। আর যদি রাশি দুইটি অসমান হয় তবে পরস্পরের মধ্যে অসমতা (inequality) বিদ্যমান।

2. যে বিবৃতিতে দুইটি রাশির মধ্যে সমতাবোধক (=) চিহ্ন থাকে তাহাকে একটি সমীকরণ (equation) বলে। যথা,—

$x=2$, $x=y$, ইত্যাদি।

আর যে বিবৃতিতে দুইটি রাশির মধ্যে বৃহত্তর বোধক (>) অথবা ক্ষুদ্রতর বোধক (<) চিহ্ন থাকে তাহাকে একটি অসমীকরণ (inequation) বলা হয়। $x+3>y$, বা, $2x<3y$ ইত্যাদি।

দুইটি রাশি অসমান হইলে অবশ্যই একটি রাশি অন্যটি অপেক্ষা বৃহত্তর অথবা ক্ষুদ্রতর হইবে।

সমীকরণের ন্যায় অসমীকরণেরও দুইটি পক্ষ থাকে। অসমতা-বোধক (≶) চিহ্নের বামদিকের রাশিকে বামপক্ষ এবং ডানদিকের রাশিকে ডানপক্ষ ধরা হয়। অসমান বোধক (>) চিহ্নের বামপক্ষটি ডানপক্ষ অপেক্ষা বৃহত্তর এবং < চিহ্নের বামপক্ষটি ডানপক্ষ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বুঝাইয়া থাকে।

3. প্রতীক চিহ্ন : =, >, <, ≥, ≤, ≠ প্রভৃতি কতিপয় প্রতীক। দুইটি রাশি সমান বুঝাইবার প্রতীক চিহ্ন (symbol) হইল =, সুতরাং a ও b সমান হইলে $a=b$ লেখা হয়।

যদি b অপেক্ষা a বড় হয়, তবে $a>b$ লেখা হয়। আর b অপেক্ষা a ছোট হইলে $a<b$ লেখা হয়। > বৃহত্তর এবং < ক্ষুদ্রতরবোধক প্রতীক।

আরও দেখ ≥ প্রতীকের দ্বারা বুঝায় একপক্ষ অপরপক্ষ অপেক্ষা

বৃহত্তর অথবা অপর পক্ষের সমান। অনুরূপে $\leqslant$ চিহ্ন দ্বারা ক্ষুদ্রতর অথবা সমান বুঝায়। যথা, $a \leqslant b$, $x \leqslant y$.

আবার, $\neq$ এইটিও একটি অসমতাবোধক চিহ্ন, ইহা দ্বারা বুঝায় বামপক্ষ ডানপক্ষের সমান নহে। $2 \neq 0$ ইত্যাদি।

4. এই সম্বন্ধে কতিপয় জ্ঞাতব্য বিষয়

(*a*) যদি $x-$ ধনাত্মক হয়, তবে বীজগণিতীয় ভাবে $x>y$ বলা হয়।

(*b*) যদি $x-y$ ঋণাত্মক হয়, তবে $x<y$ বলা হয়

দৃষ্টান্ত ঃ $7>-8$; কারণ, $7-(-8)=7+8=15$, ইহা ধনাত্মক ; এবং $-5<-3$; কারণ, $-5-(-3)=-5+3=-2$ ইহা ঋণাত্মক।

এখানে মনে রাখিবে যে শূন্যকে যে কোন ঋণাত্মক সংখ্যা অপেক্ষা বৃহত্তর ধরিতে হইবে।

(*c*) যদি $a>b$ এবং c যে কোন ধনরাশি হয়, তবে স্পষ্টই বুঝা যায় যে, (*i*) $a+c>b+c$, (*ii*) $a-c>b-c$, (*iii*) $a \times c>b \times c$ অর্থাৎ $ac>bc$, (*iv*) $a \div c>b+c$ অর্থাৎ $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$.

অতএব, নিয়ম হইল যে কোন অসমীকরণের উভয় পক্ষে একই রাশি যোগ বা বিয়োগ করিলে, কিংবা উভয় পক্ষকে একই ধনাত্মক রাশিদ্বারা গুণ বা ভাগ করিলেও তাহাদের অসমতা বজায় থাকে।

(*d*) (*i*) যদি $a-x>b$ হয়, তবে উভয়পক্ষে x যোগ করিয়া $a-x+x>b+x$, বা, $a>b+x$ হইবে।

অতএব, দেখা গেল যে, কোন অসমীকরণের কোন পদকে ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্নের বিপরীত চিহ্নযুক্ত করিয়া অপর পক্ষে পক্ষান্তর করা যায়।

(*ii*) যদি $a>b$ হয়, তবে অবশ্যই $b<a$ হইবে ; অর্থাৎ অসমীকরণের উভয় পক্ষকেই পক্ষান্তর করিলে অসমতাসূচক চিহ্নটি বিপরাত করিতে হইবে।

(*iii*) '$8>5$' ইহার উভয় পক্ষকে -3 দ্বারা গুণ করিলে বামপক্ষ হয় -24, ডানপক্ষ হয় -15, কিন্তু $-24<-15$, অর্থাৎ

$$-15>-24.$$

যদি $a>b$ হয়, তবে $-a<-b$ হইবে।

প্রমাণ : $\because$ $a>b$, $\therefore$ $a-b$ ধনাত্মক এবং $b-a$ ঋণাত্মক।

$\therefore$ $-a-(-b)=-a+b$ ইহা ঋণাত্মক, $\therefore$ $-a<-b$.

এখানে দেখা গেল অসমীকরণের উভয় পক্ষকে ঋণাত্মক রাশি দ্বারা গুণ করিলে অসমতার ক্রম পরিবর্তিত হইয়া বিপরীত অসমতা হয়।

উদাহরণ 1. $x+8=13$ একটি সমীকরণ এবং $5+y<16$ একটি অসমীকরণ।

এখানে দেখা যাক, xএর 1, 2, 3, 4, 5, 6 এই মান শ্রেণীর (set-এর) মধ্যে কোন্ মানে সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। এখানে অবশ্যই xএর একমাত্র 5 এই মানে সমীকরণটি সিদ্ধ ; কিন্তু অন্য কোন মানে সিদ্ধ নহে। $\therefore$ সমীকরণটির সমাধান হইল $x=5$.

আর, $5+y<16$ এই অসমীকরণটি yএর 11, 12, 13,... অর্থাৎ 11 ও 11 অপেক্ষা বৃহত্তর কোন মানে সিদ্ধ বা সত্য নহে ; কিন্তু 11 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর যে কোন মানে ইহা সিদ্ধ।

ইহার সমাধান হইল $y=11$ অপেক্ষা যে কোন ক্ষুদ্রতর সংখ্যা।

ইহা হইল একটি চলরাশি (y) সংক্রান্ত অসমীকরণ। যে রাশির মান পরিবর্তনশীল তাহাকে **চলরাশি** বা **চল** বলে।

উদাহরণ 2. $x+\frac{4}{5}>6$ এই অসমীকরণে xএর মান $5\frac{1}{5}$ ধরিলে উহা সিদ্ধ হয় ; কারণ $5\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=6$. x-এর অন্য কোন মানে কি ইহা

সিদ্ধ হয়? স্পষ্টই দেখা যায় যে x-এর $5\frac{1}{6}$ অপেক্ষা যে কোন বৃহত্তর মানে ইহা সিদ্ধ। অতএব, ইহার সমাধান হইল xএর মান $5\frac{1}{6}$ অথবা ইহা অপেক্ষা বৃহত্তর যে কোন মান।

উদাহরণ 3. চলরাশির এক সেট মান $(-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,)$; $3x-2 > -5$ এর সমাধান মান সেট কি হইবে?

$\because\ 3x-2 > -5,\ \therefore\ 3x-2+2 > -5+2$ (উভয় পক্ষে 2 যোগ করিয়া)

বা, $3x > -3,\ \therefore\ x > -1$ (উভয় পক্ষকে $\frac{1}{3}$ দ্বারা গুণ করিয়া)
ইহা xএর 0, 1, 2, 3 এই মানগুলিতে সিদ্ধ হয়।

অতএব প্রদত্ত মান সেট হইতে সমাধান সেট হইল (0, 1, 2, 3).

উদাহরণ 4. $4y+9 \leqslant 29$এর সমাধান সেট নির্ণয় কর।

এখানে $4y+9 \leqslant 29$, বা, $4y \leqslant 20$, বা $y \leqslant 5$.

$\therefore$ সমীকরণটির নির্ণেয় সমাধান সেট হইল $y \leqslant 5$, অর্থাৎ yএর মান 5 ও 5 অপেক্ষা যে কোন ক্ষুদ্রতর সংখ্যা।

§ 17. 1. অসমীকরণ সংক্রান্ত প্রশ্ন সমাধান

উদাহরণ 1. কোন ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার 5 গুণ উহার দ্বিগুণ ও 15-র সমষ্টি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। এই উক্তির একটি অসমীকরণ নির্ণয় ও উহার সমাধান সেট নির্ণয় কর।

মনে কর, সংখ্যাটি x.

$\therefore$ প্রদত্ত শর্ত হইতে পাই $5x < 2x+15$, ইহাই নির্ণেয় অসমীকরণ।

এক্ষণে $5x < 2x+15$, বা $3x < 15$, $\therefore\ x < 5$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট হইল 5 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অখণ্ড সংখ্যা অর্থাৎ (1, 2, 3, 4)।

উদাহরণ 2. কোন একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার 3 গুণের সহিত

18 যোগ করিলে যোগফল সংখ্যাটির 6 গুণ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়। সংখ্যাটির সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

মনে কর, সংখ্যাটি x. $\therefore$ শর্তানুসারে $3x+18>6x$,

বা, $18>6x-3x$, বা, $18>3x$, বা, $x<6$.

অতএব, সংখ্যাটি 6 অপেক্ষা ছোট যে কোন ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

উদাহরণ 3. যদি চিনির দর কিলোগ্রাম প্রতি 3 টাকা হইতে 4 টাকা হয়, তবে 36 টাকায় কত কিলোগ্রাম চিনি কেনা সম্ভব?

মনে কর, 36 টাকায় x কি. গ্রা. চিনি কেনা সম্ভব।

36 টাকায় x কি.গ্রা. চিনি কেনা যায় বলিয়া প্রতি কি.গ্রা. চিনির মূল্য হইবে $\frac{36}{x}$ টাকা।

এখন শর্তানুসারে প্রতি কি. গ্রামের মূল্য 3 টাকা হইতে 4 টাকা।

$\therefore$ $3\leqslant\frac{36}{x}\leqslant4$ হইবে$\cdots$(1). এখানে $x>0$ বলিয়া উভয় পক্ষকে x দ্বারা গুণ করিয়া পাই $3x\leqslant36\leqslant4x$ অর্থাৎ $3x$ হয় 36 অপেক্ষা ছোট অথবা 36এর সমান এবং 36 হয় $4x$এর সমান অথবা $4x$ অপেক্ষা ছোট।

এক্ষণে $3x\leqslant36$ হইতে পাই $x\leqslant12$,

আবার $36\leqslant4x$ হইতে পাই $4x\geqslant36$, বা $x\geqslant9$.

অতএব, x হইবে 9 অপেক্ষা বেশী বা 9এর সমান, কিন্তু উহা 12 অপেক্ষা কম বা 12র সমান। $\therefore$ 36 টাকায় 9 হইতে 12 কিলোগ্রাম পর্যন্ত চিনি কেনা সম্ভব।

প্রশ্নমালা 8

x-এর মান সেট $(-1, 0, 1, 2, 3)$ হইলে নিম্নের অসমীকরণগুলি সমাধান কর :—

1. $3-4x<4-6x$ 2. $5x-3<2x+1$

3. $-3x+5<-7x+11$ 4. $2x+3>5$ 5. $9x\leqslant2+7x$.

সমাধান কর :

6. $\frac{x}{3}+\frac{1}{4}<0$ 7. $8-x>3x-4$ 8. $3x-8x\geqslant\frac{15}{2}$

9. $\frac{7}{4}x>\frac{5}{8}x+3.$

10. চল রাশিটির এক সেট মান $(-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3)$ হইলে $3x-2>-5$এর সমাধান মান সেট নির্ণয় কর।

নিম্নের বিবরণগুলির জন্য একটি করিয়া অসমীকরণ নির্ণয় ও উহার সমাধান সেট দেখাও :—

11. কোন ধনাত্মক সংখ্যার চারিগুণ উহার দ্বিগুণ ও 14-র সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর।

12. কোন সংখ্যা 10 হইতে উহার 4 গুণ সংখ্যার অন্তর অপেক্ষা বৃহত্তর।

13. কোন সংখ্যার 4 গুণ হইতে 1এর অন্তর ঐ সংখ্যা ও 5এর সমষ্টি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

14. দুইটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার সমষ্টি 26 এবং বড় সংখ্যাটি ছোটটি অপেক্ষা 2এর অধিক বৃহত্তর নহে। সংখ্যাদ্বয়ের সম্ভাব্য মান কত ?

15. রাম শ্যাম অপেক্ষা 6 বৎসরের বেশী ছোট এবং উহাদের বয়সের সমষ্টি 18 বৎসর। শ্যামের ন্যূনতম বয়স কত হইতে পারে ?

16. কোন সংখ্যা হইতে 15র অন্তরফলটি 25 হইতে সেই সংখ্যার অন্তর অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। সেই সংখ্যা কি কি হইতে পারে ?

17. 55 টাকা রাম ও হরিকে এরূপে ভাগ করিয়া দিতে হইবে যেন রামের টাকা হরির টাকার এক-তৃতীয়াংশ ও 15 টাকার সমষ্টি অপেক্ষা কম হয়। হরি ন্যূনপক্ষে কত টাকা পাইবে ?

18. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 9 এবং এককের অঙ্ক দশকের অঙ্ক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে সম্ভাব্য সংখ্যা কি কি হইতে পারে ?

দ্বিতীয় অধ্যায়

বহুপদ রাশিদ্বয়ের গুণন

[নূতন পাঠ]

ইতিপূর্বে গুণন প্রক্রিয়ায় নিম্ন বিধিসমূহ আলোচিত হইয়াছে। জটিল রাশিগুলির পরস্পর গুণনেও ঐ বিধিসমূহ ব্যবহৃত হইবে।

(1) **বিনিময় বিধি :** $a \times b = b \times a$

অর্থাৎ দুইটি রাশির গুণফল নির্ণয়ে যে কোন একটিকে অপরটি দ্বারা গুণ করা চলিবে।

(2) **সংযোগ বিধি :** $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

(3) **বিচ্ছেদ বিধি :** $(a+b)x = ax + bx$

অর্থাৎ একটি দ্বিপদ বা বহুপদরাশিকে একপদ রাশি দ্বারা গুণ করিতে হইলে পূর্ব রাশির প্রত্যেক পদকে অপর রাশি দ্বারা গুণ করিতে হইবে।

(4) **সূচক বিধি :** (i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(ii) $(a\ )^n = a^{mn}$.

§ 18. বহুপদ রাশিকে বহুপদ রাশি দ্বারা গুণ করিতে হইলে সাধারণতঃ গুণ্য ও গুণককে একই অক্ষরের ঘাতের ঊর্ধ্বক্রম বা অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া লইয়া পাটীগণিতের গুণক্রিয়ার ন্যায় স্তম্ভে সাজাইয়া গুণ করিলে সহজে গুণফল নির্ণয় হয়। অবশ্য স্তম্ভে না সাজাইয়াও গুণন ক্রিয়া নিষ্পন্ন হইতে পারে।

উদাহরণ 1. $x^2 - xy + y^2$কে $y^2 + yx + x^2$ দ্বারা গুণ কর।

এখানে উভয় রাশিকে xএর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজান হইল।

$$\begin{array}{l} x^2-xy+y^2 \\ x^2+xy+y^2 \\ \hline x^4-x^3y+x^2y^2 \qquad\qquad [\,x^2 \text{ দ্বারা গুণন}\,] \\ \qquad x^3y-x^2y^2+xy^3 \qquad [\,xy \text{ দ্বারা গুণন}\,] \\ \qquad\qquad +x^2y^2-xy^3+y^4 \quad [\,y^2 \text{ দ্বারা গুণন}\,] \\ \hline x^4 \qquad +x^2y^2 \qquad +y^4 \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় গুণফল $=x^4+x^2y^2+y^4$.

উদাহরণ 2. $a^2-ab+b^2+a+b+1$কে $a+b-1$ দ্বারা গুণ কর।

$$\begin{array}{l} a^2-ab+a+b^2+b+1 \\ a+b-1 \\ \hline a^3-a^2b+a^2+ab^2+ab+a \\ \qquad a^2b \qquad -ab^2+ab \qquad +b^3+b^2+b \\ \qquad\quad -a^2 \qquad +ab-a \qquad -b^2-b-1 \\ \hline a^3 \qquad\qquad +3ab \quad +b^3 \qquad\qquad -1 \end{array}$$

$\therefore$ গুণফল $=a^3+b^3-1+3ab$.

উদাহরণ 3. $1-ax$, $1-by$ এবং $1-cz$এর ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর।

$$\begin{array}{l|l} & \text{এক্ষণে,} \\ 1-ax & 1-ax-by+abxy \\ 1-by & 1-cz \\ \hline 1-ax & 1-ax-by+abxy \\ \quad -by+abxy & \qquad\qquad -cz+aczx \\ & \qquad\qquad +bcyz-abcxyz \\ \hline 1-ax-by+abxy & 1-ax-by+abxy-cz+aczx \\ & \qquad\qquad +bcyz-abcxyz \end{array}$$

$\therefore$ গুণফল $=1-(ax+by+cz)+(abxy+aczx+bcyz)-abcxyz$.

উদাহরণ 4. $a^{\frac{2}{5}} - a^{\frac{1}{5}}b^{-\frac{1}{6}} + b^{-\frac{1}{3}}$কে $a^{\frac{1}{5}} + b^{-\frac{1}{6}}$ দ্বারা গুণ কর।

$$
\begin{array}{l}
a^{\frac{2}{5}} - a^{\frac{1}{5}}b^{-\frac{1}{6}} + b^{-\frac{1}{3}} \\
a^{\frac{1}{5}} + b^{-\frac{1}{6}} \\
\hline
a^{\frac{3}{5}} - a^{\frac{2}{5}}b^{-\frac{1}{6}} + a^{\frac{1}{5}}b^{-\frac{1}{3}} \\
\qquad + a^{\frac{2}{5}}b^{-\frac{1}{6}} - a^{\frac{1}{5}}b^{-\frac{1}{3}} + b^{-\frac{1}{2}} \\
\hline
a^{\frac{3}{5}} \qquad\qquad\qquad\qquad + b^{-\frac{1}{2}}
\end{array}
$$

$\therefore$ গুণফল $= a^{\frac{3}{5}} + b^{-\frac{1}{2}}$.

প্রশ্নমালা 9

প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশিদ্বারা গুণ কর :—

1. $5a^2-3a+7,\ 3a^2-2a+3$
2. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\ a^2+2ab+b^2$
3. $2x^4-3x^2+5,\ 2x^2-x-1$
4. $x^4+x^2y^2+y^4,\ x^4-x^2y^2+y^4$
5. $3a^3-2a^2+2,\ 2a^2-a+1$
6. $1+2a-2a^2-a^3,\ 1-a^2+a^3$
7. $a^2+2ab+b^2-c^2,\ a^2+2ab+b^2+c^2$
8. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca,\ a+b+c$
9. $x^2+y^2+z^2-xy+yz+zx,\ x+y-z$
10. $a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4,\ a-b$
11. $ax^2+bx+c,\ cx+a$ 12. $x^2+(a-b)x+b^2,\ x+a$
13. $ax^3+bx^2+cx,\ ax^2-bx-c$
14. $a^4-a^3+3a^2+2a+4,\ a^2+a-2$
15. $x^2+y^2-xy+x+y+1,\ x+y-1$
16. $a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b,\ a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b$
17. $x^{\frac{5}{2}}+x^2y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{2}{3}}+xy+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{5}{3}},\ x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{3}}$
18. $a+b+c+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}},\ a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}}$

19. $a^3-3a^2b^{-\frac{1}{3}}+3ab^{-\frac{2}{3}}-b^{-1},\ a-b^{-\frac{1}{3}}$

20. $x^3-3x^2y^{-1}+3xy^{-2}-y^{-3},\ x-y^{-1}$

ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর :—

21. $(a+3), (a+4), (a+5)$ 22. $(2x-3), (3x-4), (x-1)$

23. $(a^2-ab+b^2), (a^2+ab+b^2), (a^4-a^2b^2+b^4)$ [P.U. '26]

24. $(ax+b), (ax-b), (bx-a)$

25. $(x^2+x+1), (x^2-x+1), (x^4+x^2+1)$

26. $(b-c), (c-a), (a-b), (a+b+c)$

27. $(x+y+z), (x-y+z), (y+z-x), (y+x-z)$

28. $(x+1), (x-1)(x^2+x+1), (x^2-x+1)$

29. $(bc+ca+ab), (bc-ca+ab), (ab+bc)$

30. $(x^{-1}+y^{-1})(x^{-1}-y^{-1})(x^{-2}+y^{-2})(x^{-4}+y^{-4})$

গুণফল নির্ণয় কর :—

31. $2x^2-3x+5,\ 3x^2+x-1$

32. $2x^3-3x^2+x-5,\ x-2-2x^2$

33. $x^3y^3-2x^2y^2+xy+1,\ x^2y^2-1+xy$

34. $3x^4+2x^2-1,\ x^3-2x+1$

35. $a^4-2a^3b+b^4,\ a^2-b^2.$

---

§ 19. বহুপদ রাশিকে বহুপদ রাশি দ্বারা ভাগ

ইতিপূর্বে ভাগের নিয়ম সম্বন্ধে আলোচনা হইয়াছে। স্মরণ রাখিতে হইবে যে, ভাজ্য ও ভাজককে একই অক্ষরের ঘাতের ঊর্ধ্বক্রম বা অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া লইতে হইবে। নিম্নে কয়েকটি ভাগক্রিয়ার আদর্শ দেওয়া হইল।

উদাহরণ 1. $x^4+2x^2-x^3+3+x$কে x^2+x+1 দ্বারা ভাগ কর।

এখানে ভাজ্যকে xএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া লইতে হইবে।

$$
\begin{array}{l}
x^2+x+1\,)\,x^4-x^3+2x^2+x+3\,(\,x^2-2x+3 \\
\qquad\qquad\;\; \underline{x^4+x^3+x^2} \\
\qquad\qquad\quad -2x^3+x^2+x+3 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-2x^3-2x^2-2x} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 3x^2+3x+3 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{3x^2+3x+3}
\end{array}
$$

$\therefore$ ভাগফল $=x^2-2x+3.$

উদাহরণ 2. $a^3+b^3+c^3-3abc$কে $a+b+c$ দ্বারা ভাগ কর।

$$
\begin{array}{l}
a+b+c\,)\,a^3-3abc+b^3+c^3\,(\,a^2-ab-ac+b^2+c^2-bc \\
\qquad\qquad \underline{a^3+a^2b+a^2c} \\
\qquad\qquad -a^2b-a^2c-3abc+b^3+c^3 \\
\qquad\qquad \underline{-a^2b-ab^2-\;abc} \\
\qquad\qquad -a^2c+ab^2-2abc+b^3+c^3 \\
\qquad\qquad \underline{-a^2c\qquad\;\;-abc-ac^2} \\
\qquad\qquad\quad ab^2+ac^2-abc+b^3+c^3 \\
\qquad\qquad\quad \underline{ab^2\qquad\qquad\quad+b^3+b^2c} \\
\qquad\qquad\qquad ac^2-abc-b^2c+c^3 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{ac^2\qquad\quad+bc^2+c^3} \\
\qquad\qquad\qquad\quad -abc-b^2c-bc^2 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-abc-b^2c-bc^2}
\end{array}
$$

$\therefore$ ভাগফল $=a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc.$

উদা. 3. $pqx^2-(p^2+q^2)x+pq$কে $px-q$ দ্বারা ভাগ করিতে হইবে।

$$
\begin{array}{l}
px-q\,)\,pqx^2-p^2x-q^2x+pq\,(\,qx-p \\
\qquad\quad \underline{pqx^2\qquad\quad-q^2x} \\
\qquad\qquad\qquad -p^2x+pq \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-p^2x+pq}
\end{array}
$$

$\therefore$ ভাগফল $=qx-p.$

উদা. 4. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$কে $a-b$ দ্বারা ভাগ করিতে হইবে।

ভাজ্যকে aএর ঘাত অনুসারে সাজাইলে

$a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$ হয়।

$$
\begin{array}{r|l}
a-b & a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c) \quad (a(b-c)-c(b-c) \\
 & \underline{a^2(b-c)-ab(b-c)} \\
 & -ac(b-c)+bc(b-c) \\
 & \underline{-ac(b-c)+bc(b-c)}
\end{array}
$$

$\therefore$ ভাগফল $=a(b-c)-c(b-c)$.

[উদা. 3 ও 4এ বন্ধনী অপসৃত করিয়া ভাগ করা সহজ]

উদা. 5. $x^3+x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}+y^3$কে $x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{3}{2}}$ দ্বারা ভাগ কর।

$$
\begin{array}{r|l}
x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{3}{2}} & x^3+x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}+y^3 \quad (x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{3}{2}} \\
 & \underline{x^3-x^{\frac{9}{4}}y^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}} \\
 & x^{\frac{9}{4}}y^{\frac{3}{4}} \qquad\qquad +y^3 \\
 & \underline{x^{\frac{9}{4}}y^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{9}{4}}} \\
 & x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{9}{4}}+y^3 \\
 & \underline{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{9}{4}}+y^3}
\end{array}
$$

$\therefore$ ভাগফল $=x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{3}{2}}$.

§ 20. অসম্পূর্ণ ভাগ (Inexact Division)

যখন কোন রাশিকে অপর একটি রাশি দ্বারা নিঃশেষে ভাগ করা যায় না, অবশিষ্ট থাকে, তখন এই ভাগকে অসম্পূর্ণ ভাগ বলে। পাটীগণিতে যেমন 19কে 4 দিয়া ভাগ করিলে ভাগফল হয় 4 এবং অবশিষ্ট থাকে 3, এবং সম্পূর্ণ ভাগফলটি $4\frac{3}{4}$ লেখা যায়, বীজগণিতেও তেমনি aকে b দিয়া ভাগ করিলে যদি ভাগফল হয় q এবং অবশিষ্ট থাকে r, তবে সম্পূর্ণ ভাগফলটি হইবে $q+\frac{r}{b}$.

উদা. 6. x^3+x^2+5x+1কে x^2+2x+3 দ্বারা ভাগ করিতে হইবে।

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x+3 \,)\; x^3+x^2\;\;+5x+1 & x-1 \\ x^3+2x^2+3x\quad & \\ \hline -x^2+2x+1 & \\ -x^2-2x-3 & \\ \hline 4x+4 & \end{array}$$

এখানে ভাগফল $x-1$ হইয়া অবশিষ্ট রহিল $4x+4$.

$\therefore$ সম্পূর্ণ ভাগফল হইল $(x-1)+\dfrac{4x+4}{x^2+2x+3}$.

লক্ষ্য কর, অবশিষ্টের অক্ষরের ঘাত যখন ভাজকের ঘাত আপেক্ষা কম, তখনই ভাগক্রিয়া শেষ হইল, আর ভাগ চলে না।

প্রশ্নমালা 10

প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশি দ্বারা ভাগ কর :

1. (a) $5x^2-2x-3,\ x-1$ (b) $a^4-6a-4,\ a-2$
   (c) $a^3+8a^2+11a-6,\ a^2+2a-1$.
2. $x^4-10x^3+10x^2-6x-27,\ x^2-2x+3$.
3. $-15a^2+14a^3-2a^4-4-35a,\ a^2-3a-4$.
4. $4x^5+5x^3y^2-11x^2y^3-16y^5,\ 2x^2+3xy+4y^2$.
5. $1-x^2-y^2+2xy,\ 1+x-y$.
6. $a^4-b^4+x^4+2a^2x^2,\ a^2-b^2+x^2$.
7. $a^4+4b^4,\ a^2-2ab+2b^2$.
8. $16x^3-8x^4-x+2,\ 3x-2x^2+2$.
9. $x^3+y^3+3xy-1,\ x+y-1$.
10. $a+a^5+a^6,\ a^2+a+1$. [C. U. '18]
11. $x^6+2x^3y^3+y^6,\ x^2+2xy+y^2$.
12. $a^6-b^6,\ a^2-ab+b^2$. [D. B. '22]
13. (i) $a^3+b^3+c^3-3abc,\ a+b+c$.
    (ii) $a^3-27b^3+c^3+9abc,\ a-3b+c$.
14. $a^4+b^4+2a^2b^2-2c^2d^2-c^4-d^4,\ a^2+b^2-c^2-d^2$.
15. $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2=2y^2z^2-2z^2x^2,\ x^2+y^2-z^2+2xy$.

16. $a+b+c-3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}$.

17. $a-b$, $a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}$ 18. $a-b^{-1}$, $a^{\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}$.

19. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$, $a+b+c$.

20. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$, $bc+ab+ac+a^2$.

21. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$, $ab+bc+ca$.

22. $x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$,
$x^2+(b+c)x+bc$.

সম্পূর্ণ ভাগফল নির্ণয় কর :

23. $10a^2+17a+8$, $2a+3$.

24. $5x^3+3x^2+2x-1$, x^2+2x+3.

25. $2x^3+9x^2+13x+1$, x^2+3x+1.

ভাগফল নির্ণয় কর (প্রথমটি ভাজ্য, দ্বিতীয়টি ভাজক) :

26. $x^3+8x^2+11x-6$, x^2+2x-1.

27. $a^3+5a^2-10a+4$, $a-1$,

28. a^4+10a^2-56, $a+2$.

29. $2a^6-3a^5+7a^3-16a+15$, a^4-2a^2+4.

30. $x^6+11x-34$, $x^4+2x^3-4x+x^2-12$.

31. $x^3+x^2-4x-12$এর সহিত কি যোগ করিলে যোগফল $x-5$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে ?

32. ভাজক x^2+2x-1, ভাগফল x^2-2x+1, অবশিষ্ট $x+1$; ভাজ্য কত ?

33. ভাগফল $2a^2-a-4$, ভাগশেষ $2a+9$, ভাজ্য $2a^4-a^3+1$; ভাজক কত ?

ভাগফলে তিনটি পদ পর্যন্ত ভাগ কর :

34. $(1+2x)\div(1-2x)$. 35. $1\div(1+2x+x^2)$.

36. aএর মান কত হইলে $4x^3-12x^2+(a+4)x-3$ সম্পূর্ণরূপে $2x-3$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে ?

তৃতীয় অধ্যায়

ঘনফল নির্ণয়

§ 21. দ্বিপদ রাশির ঘনফল।

সূত্র 1. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

অথবা, $= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.

প্রমাণ : $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2)$

$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

অথবা, $= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.

সূত্র 2. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

অথবা, $= a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$.

প্রমাণ : $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2 = (a-b)(a^2 - 2ab + b^2)$

$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$

$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

অথবা, $= a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$.

দ্রষ্টব্য : সূত্র-1এ bর স্থলে $-b$ বসাইলেও সূত্র-2 পাওয়া যায়। যথা, $(a-b)^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$

$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

অনুসিদ্ধান্ত। $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

এবং $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$.

§ 22. ঐ সূত্রদ্বয়ের প্রয়োগের উদাহরণ।

উদাহরণ 1. $(2x+3)$এর ঘনফল নির্ণয় করিতে হইবে।

$(2x+3)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2.3 + 3(2x).3^2 + 3^3$

$= 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$.

উদাহরণ 2. $1-2x$এর ঘনফল নির্ণয় করিতে হইবে।

$(1-2x)^3 = 1^3 - 3.1^2.(2x) + 3.1.(2x)^2 - (2x)^3$

$= 1 - 6x + 12x^2 - 8x^3$.

উদাহরণ 3. সরল কর :

$$(2x-3y)^3-(2x+3y)^3+18y(2x-3y)(2x+3y).$$

মনে কর, $a=2x-3y$ এবং $b=2x+3y$.

$\therefore\ a-b=2x-3y-2x-3y=-6y.$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিটি $=a^3-b^3-3ab\times-6y$

$=a^3-b^3-3ab(a-b)=(a-b)^3$

$=(-6y)^3$ [$a-b$এর মান বসাইয়া] $=-216y^3$.

§ 23. দুইটি সমান বস্তু হইতে সমান সমান বস্তু বিয়োগ করিলে বিয়োগফল দুইটি সমান হইবে ; এবং দুইটি সমান সমান বস্তুর সহিত সমান সমান বস্তু যোগ করিলে যোগফল দুইটি সমান হইবে। এই দুইটি স্বতঃসিদ্ধ।

$\because\ a^3+b^3+3ab(a+b)=(a+b)^3,$

$\therefore\ a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$;

আবার, $\because\ a^3-b^3-3ab(a-b)=(a-b)^3$

$\therefore\ a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b).$

উদা. 1. যদি $a+b=5$ এবং $ab=6$ হয়, তবে a^3+b^3এর মান কত ?

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=5^3-3\times6\times5$

$=125-90=35.$

উদা. 2. যদি $a-b=1$ এবং $ab=12$ হয়, তবে a^3-b^3এর মান কত ?

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)=1^3+3\times12\times1$

$=1+36=37.$

উদা. 3. যদি $x-\frac{1}{x}=p$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$x^3-\frac{1}{x^3}=p^3+3p.$$

$x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3x.\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$$=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)=p^3+3p.$$

উদা. 4. যদি $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3$ হয়, তবে $x^3+\frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর। [C. U. '45 ; U. P. '24]

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x.\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=3\left(x+\frac{1}{x}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=0.$$

উদা. 5. $x=2$ এবং $y=-1$ হইলে,

$x^3-3x^2y+3xy^2-8y^3$-এর মান নির্ণয় কর।

রাশিটি $=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3-7y^3=(x-y)^3-7y^3$

$$=(2+1)^3-7\times(-1)^3=27+7=34.$$

বহুপদ রাশির ঘনফল :

উদা. 1. $a+b+c$-এর ঘনফল নির্ণয় কর।

$$(a+b+c)^3=\{(a+b)+c\}^3$$

$$=(a+b)^3+3(a+b)^2.c+3(a+b).c^2+c^3$$

$$=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)+3(a^2+2ab+b^2)c$$
$$+3(a+b)c^2+c^3$$

$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2$$
$$+3bc^2+c^3$$

$$=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c$$
$$+3bc^2+6abc.$$

উদা. 2. $a+b-c+d$-এর ঘনফল নির্ণয় কর।

$$(a+b-c+d)^3=\{(a+b)-(c-d)\}^3$$

$$=(a+b)^3-3(a+b)^2.(c-d)+3(a+b)(c-d)^2-(c-d)^3$$

$$= a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 - 3(a^2 + 2ab + b^2)(c - d) + 3(a + b)(c^2 - 2cd + d^2) - (c^3 - 3c^2d + 3cd^2 - d^3)$$

$$= a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 - 3a^2c - 6abc - 3b^2c + 3a^2d + 6abd + 3b^2d + 3ac^2 - 6acd + 3ad^2 + 3bc^2 - 6bcd + 3bd^2 - c^3 + 3c^2d - 3cd^2 + d^3.$$

প্রশ্নমালা 11

নিম্ন রাশিগুলির ঘনফল নির্ণয় কর :

1. $2a+3b$ 2. $2a-3b$ 3. $xy+1$
4. $xy-1$ 5. $xy+x$ 6. $xy-y$
7. $abc-2a$ 8. $2abc+a$ 9. $2x-1$
10. $2a+bc$ 11. $xy+yz$ 12. $3abc-1$

13. যদি $a+b=6$ এবং $ab=9$ হয়, তবে a^3+b^3-এর মান নির্ণয় কর।

14. যদি $a-b=0$ এবং $ab=4$ হয়, তবে a^3-b^3-এর মান কত ?

15. যদি $a+\frac{1}{a}=5$ হয়, তবে $a^3+\frac{1}{a^3}$-এর মান কত ?

16. যদি $p+\frac{1}{p}=a$ হয়, তবে $p^3+\frac{1}{p^3}$-এর মান কত হইবে ?

17. $a-\frac{1}{a}=2$ হইলে $a^3-\frac{1}{a^3}$-এর মান কত ?

18. $x+\frac{1}{x}=2$ হইলে $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)$-এর মান নির্ণয় কর।

19. যদি $a-b=2$, এবং $ab=24$ হয়, তবে $(a^2+b^2)(a^3-b^3)$এর মান নির্ণয় কর।

20. $a+b=3$ হইলে, দেখাও যে, $a^3+b^3+9ab=27$. [C.U. '27]

21. যদি $a+b=c$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a^3+b^3+3abc=c^3$.

22. $2x-\frac{2}{x}=3$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $8\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)=63$. [D. B. '29]

সরল কর :

23. $(x+3y)^3-3(x+3y)^2y+3(x+3y)y^2-y^3$

24. $(x+y+z)^3-(x-y-z)^3-6(x+y+z)(x-y-z)(y+z)$

25. $(2x-y)^3+(2x+y)^3+12x(4x^2-y^2)$

মান নির্ণয় কর :

26. $8a^3+12a^2+6a+2$, যখন $a=\frac{1}{2}$.

27. $x^3-9x^2+27x-27$, যদি $x=3$ হয়।

28. $125a^3+225a^2b+135ab^2+27b^3$, যখন $a=-3, b=4$.

29. $8-9x+27x^2-27x^3$, যদি $x=2$ হয়।

30. $27y^3-108y^2+144y-217$, যখন $y=3$.

31. x^3+y^3+3xy, যখন $x+y=1$.

32. x^3-y^3-6xy, যখন $x-y=2$.

33. $22{\cdot}56\times22{\cdot}56\times22{\cdot}56+3\times22{\cdot}56\times22{\cdot}56\times17{\cdot}44$
$+3\times22{\cdot}56\times17{\cdot}44\times17{\cdot}44+17{\cdot}44\times17{\cdot}44\times17{\cdot}44$

34. ${\cdot}57\times{\cdot}57\times{\cdot}57-{\cdot}27\times{\cdot}27\times{\cdot}27-3\times{\cdot}57\times{\cdot}27({\cdot}57-{\cdot}27)$.

সূত্র সাহায্যে ঘনফল নির্ণয় কর :

35. 29 36. $a+b-c$ 37. $a-b-c$ 38. $3x+2y-z$.

---

§ 24. সূত্র 3. $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.

প্রমাণ : $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$$=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3.$$

সূত্র 4. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

প্রমাণ : $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3=a^3-b^3.$$

[সূত্র দুইটির প্রয়োগ]

উদা. 1. $(3x-2y)$ ও $(9x^2+6xy+4y^2)$-এর গুণফল নির্ণয় কর।

$$\text{গুণফল}=(3x-2y)\{(3x)^2+(3x)(2y)+(2y)^2\}$$
$$=(3x)^3-(2y)^3=27x^3-8y^3.$$

উদা. 2. সরল কর :

$$(b-c)(b^2+bc+c^2)+(c-a)(c^2+ca+a^2)+(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

রাশিটি $=(b^3-c^3)+(c^3-a^3)+(a^3-b^3)$
$=b^3-c^3+c^3-a^3+a^3-b^3=0.$

উদা. 3. গুণফল নির্ণয় কর :

$$(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2).$$

এখানে $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

এবং $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

$\therefore$ গুণফল $=(a^3+b^3)(a^3-b^3)=(a^3)^2-(b^3)^2=a^6-b^6.$

প্রশ্নমালা 12

গুণফল নির্ণয় কর :

1. $(x-2)(x^2+2x+4)$ 2. $(1-2x)(1+2x+4x^2)$
3. $(3a-4b)(9a^2+12ab+16b^2)$
4. $(ab+2a)(a^2b^2-2a^2b+4a^2)$
5. $(xyz-1)(x^2y^2z^2+xyz+1)$
6. $(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)$
7. $(2x-3y)(2x+3y)(4x^2+6xy+9y^2)(4x^2-6xy+9y^2)$
8. $(8a^3-27b^3)(4a^2-6ab+9b^2)(2a+3b)$

সরল কর :

9. $(2x-3)(4x^2+6x+9)-(2x+3)(4x^2-6x+9)$.
10. $(x+2)(x^2-2x+4)+(2x-1)(4x^2+2x+1)-9(x-1)(x^2+x+1)$
11. $(y-z)(y^2+yz+z^2)+(z-x)(z^2+zx+x^2)+(x-y)(x^2+xy+y^2)$
12. $(a+b)(a^2-ab+b^2)+(b+c)(b^2-bc+c^2)+(c+a)(c^2-ca+a^2)$
13. $(a-1)(a^2+a+1)+(b-1)(b^2+b+1)+(c-1)(c^2+c+1)$
14. $(3x+1)(9x^2-3x+1)-(3x-1)(9x^2+3x+1)$

শূন্যস্থান পূর্ণ কর :

15. $(2x-3y)^3=8x^3-27y^3-(\quad)(2x-3y)$
16. $27p^3+q^3=(3p+q)\{9p^2-(\quad)+q^2\}$

নিম্নের রাশিগুলির সহিত কত যোগ করিলে ঘনরাশিতে পরিণত হইবে ?

17. $8x^3+36x^2+54x$ 18. $x^6-3x^4+3x^2$
19. $-27a+9a^2-a^3$ 20. $x^6+6x^4y+12x^2y^2$

চতুর্থ অধ্যায়

উৎপাদক নির্ণয়

§ 25. দুইটি ঘনরাশির সমষ্টি বা অন্তর :

আমরা জানি, $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

এবং $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

সুতরাং উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিলে হইবে

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

এবং $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

দ্রষ্টব্য : সূত্রের সাহায্য না লইয়াও বিশ্লেষণ করা যায়। যথা,

$$\begin{aligned} a^3+b^3 &= a^3+a^2b-a^2b-ab^2+ab^2+b^3 \\ &= (a^3+a^2b)-(a^2b+ab^2)+(ab^2+b^3) \\ &= a^2(a+b)-ab(a+b)+b^2(a+b) \\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2)\ ; \end{aligned}$$

এবং
$$\begin{aligned} a^3-b^3 &= a^3-a^2b+a^2b-ab^2+ab^2-b^3 \\ &= a^2(a-b)+ab(a-b)+b^2(a-b) \\ &= (a-b)(a^2+ab+b^2). \end{aligned}$$

উদা. 1. $8a^3+27b^3$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$\begin{aligned} 8a^3+27b^3 &= (2a)^3+(3b)^3 \\ &= (2a+3b)\{(2a)^2-2a.3b+(3b)^2\} \\ &= (2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2). \end{aligned}$$

উদা. 2. $81a^3b^3-3$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

$$\begin{aligned} 81a^3b^3-3 &= 3(27a^3b^3-1)=3\{(3ab)^3-(1)^3\} \\ &= 3(3ab-1)(9a^2b^2+3ab+1). \end{aligned}$$

উদা. 3. $a^6-b^6=(a^3)^2-(b^3)^2=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$

$$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

উদা. 4. $8(a+b)^3+c^3$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$\begin{aligned} & 8(a+b)^3+c^3=\{2(a+b)\}^3+(c)^3 \\ &= \{2(a+b)+c\}\{4(a+b)^2-2(a+b).c+c^2\} \\ &= (2a+2b+c)(4a^2+4b^2+8ab-2ac-2bc+c^2). \end{aligned}$$

উদা. 5. $x^3+6x^2+12x+9$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশিটি $= x^3+3x^2.2+3.x.2^2+2^3+1$

$= (x+2)^3+(1)^3$

$= (x+2+1)\{(x+2)^2-(x+2).1+(1)^2\}$

$= (x+3)(x^2+4+4x-x-2+1)$

$= (x+3)(x^2+3x+3).$

[অন্য প্রকারে]

রাশিটি $= (x^3+3x^2)+(3x^2+9x)+(3x+9)$

$= x^2(x+3)+3x(x+3)+3(x+3)$

$= (x+3)(x^2+3x+3).$

প্রশ্নমালা 13

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. x^3+y^3
2. a^3-8b^3
3. x^3-27
4. $27+a^3$
5. $8a^3+27b^3$
6. a^6-1
7. $81a^3+3b^3$
8. $64x^3-27y^3$
9. $2a^3-250$
10. x^6-y^6
11. $81x^3+192y^3$
12. $64a^3-125b^3$
13. x^3y^3+1
14. $a^3b^3+c^3$
15. $8-(a+b)^3$
16. $27(a+b)^3+1$
17. $a^3b^3-64c^3$
18. $8(a-b)^3-1$
19. $(x+y)^3-(x-y)^3$
20. $216a^3-729b^3$
21. $a^3-64(b+c)^3$
22. x^4y-xy^4
23. $(2x+3)^3-(x-3)^3$
24. $(a+b+c)^3-1$
25. $8(a+b)^3+27(b+c)^3$
26. a^3+3a^2+3a+2
27. $(a+b)^3-(a-b)^3$
28. $8a^3+12a^2+6a+2$
29. $a^3+6a^2+12a+7$
30. $x^3+9x^2+27x+26$
31. $a^3+b^3-ab(a+b)$
32. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3+c^3$
33. $a^{12}-b^{12}$
34. $m^3-n^3-m(m^2-n^2)+n(m-n)^2$ [B. U. '20]

পঞ্চম অধ্যায়

উৎপাদকে বিশ্লেষণ

§ **26.** x^2+px+q আকারের x-অক্ষরের দ্বিমাত্রিক রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণ।

লক্ষ্য কর—(1) উক্ত রাশিটিতে x^2এর সহগ 1 (এক), x-এর সহগ $+p$ এবং x-নিরপেক্ষ পদ $+q$.

(2) আবার, $x^2+(a+b)x+ab$ রাশিমালাটিও x-অক্ষরের দ্বিমাত্রিক; ইহার আকৃতি x^2+px+qএর অনুরূপ। $a+b=p$ এবং $ab=q$ বসাইলেই রাশিটি $=x^2+px+q$ হয়।

এখন, $x^2+(a+b)x+ab=x^2+ax+bx+ab$

$$=(x^2+ax)+(bx+ab)$$
$$=x(x+a)+b(x+a)$$
$$=(x+a)(x+b).$$

এখন, x^2+px+qএর গুণনীয়ক $(x+a)(x+b)$ হইবে, যদি $a+b=p$ এবং $ab=q$ হয়, সুতরাং x^2+px+qকে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিতে হইলে, এরূপ দুইটি রাশি নির্ণয় করিতে হইবে যাহাদের বৈজিক যোগফল p (অর্থাৎ xএর সহগ) এবং গুণফল q অর্থাৎ x বর্জিত পদ) হয়।

উদা. 1. $x^2-8x-20$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

এখানে -20এর উৎপাদক $(+4,-5)$, $(-5,+4)$, $(+10,-2)$, $(+2,-10)$, $(+20,-1)$ ও $(-20,+1)$;

ইহাদের মধ্যে $(+2)+(-10)=-8$ (অর্থাৎ x-এর সহগ)।

অতএব, $x^2-8x-20=x^2+2x-10x-20$

$$=x(x+2)-10(x+2)=(x+2)(x-10).$$

উদা. 2. $a^2-ab-30b^2$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশিটি $=a^2+5ab-6ab-30b^2$

$$=a(a+5b)-6b(a+5b)=(a+5b)(a-6b).$$

উদা. 3. $(x+y)^2-5(x+y)+6$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এখানে $x+y=a$ ধরিলে রাশিটি a^2-5a+6 হয়।

$\therefore$ রাশিটি $=a^2-5a+6=a^2-2a-3a+6$

$=a(a-2)-3(a-2)=(a-2)(a-3)$

$=(x+y-2)(x+y-3)$ [a-র মান বসাইয়া]

উদা. 4. a^4+4a^2-5কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এখানে $a^2=x$ ধরিলে রাশিটি x^2+4x-5 হয় ;

অতএব, রাশিটি $=x^2+4x-5$

$=x^2+5x-x-5=x(x+5)-1(x+5)$

$=(x+5)(x-1)=(a^2+5)(a^2-1)$

[xএর স্থলে a^2 বসাইয়া]

$=(a^2+5)(a+1)(a-1)$.

উদা. 5. $x^2+4abx-(a^2-b^2)^2$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এখানে $-(a^2-b^2)^2$এর উৎপাদক হইল $-(a+b)^2$ ও $(a-b)^2$ অথবা $(a+b)^2$ ও $-(a-b)^2$.

দেখা যায় $(a+b)^2-(a-b)^2$

$=a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2$

$=4ab$ [ইহা x-এর সহগ]

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিটি $=\{x^2+(a+b)^2x\}$

$-\{(a-b)^2x+(a+b)^2(a-b)^2\}$

$=x\{x+(a+b)^2\}-(a-b)^2\{x+(a+b)^2\}$

$=\{x+(a+b)^2\}\{x-(a-b)^2\}$.

উদা. 6. $x^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)x+1$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এখানে $-\left(a+\frac{1}{a}\right)=-a-\frac{1}{a}$ এবং $-a\times-\frac{1}{a}=1$.

প্রদত্ত রাশি $=x^2-ax-\frac{x}{a}+1$

$=x(x-a)-\frac{1}{a}(x-a)=(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right)$.

উদা. 7. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। [C. U. '41]

প্রদত্ত রাশি $=\{(x+1)(x+7)\}\{(x+3)(x+5)\}+15$
$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$
$=(a+7)(a+15)+15$ [$x^2+8x=a$ ধরিয়া]
$=a^2+22a+105+15=a^2+22a+120$
$=a^2+12a+10a+120=a(a+12)+10(a+12)$
$=(a+12)(a+10)$
$=(x^2+8x+12)(x^2+8x+10)$ [a-র মান বসাইয়া]
$=(x^2+6x+2x+12)(x^2+8x+10)$
$=\{x(x+6)+2(x+6)\}(x^2+8x+10)$
$=(x+2)(x+6)(x^2+8x+10).$

[দ্রষ্টব্য : এখানে বন্ধনী চারিটি একত্রে গুণ না করিয়া দুই-দুইটি বন্ধনী গুণ করা হইয়াছে, কিন্তু যে-কোন দুইটি বন্ধনী লওয়া হয় নাই। এমন দুই-দুইটি বন্ধনী লইয়া দুই দল করিতে হইবে যেন প্রথম দলের বন্ধনী দুইটির যোগফল অন্য দুইটি বন্ধনীর যোগফলের সমান হয়।]

প্রশ্নমালা 14

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর (Resolve into factors) :

1. $x^2+9x+20$ 2. $x^2-9x+20$ 3. x^2-x-20
4. $x^2+19x-20$ 5. $x^2-13x+36$ 6. $x^2-20x+36$
7. $x^2-16x-36$ 8. $x^2+16x-36$ 9. $x^2+2x-15$
10. x^2-6x+8 11. a^2-a-6 12. $x^2+18x+80$
13. a^2-8a+7 14. $x^2-2x-35$ 15. $x^2+2x-143$
16. $x^2+3x-180$ 17. $a^2-25a+156$ 18. $x^2+5x-176$
19. $a^2-ab-6b^2$ 20. $x^2-12xy+27y^2$
21. $x^2+24x-81$ 22. $x^2+xy-6y^2$
23. $p^2-pq-72q^2$ 24. $(a+b)^2-(a+b)-6$
25. $(a+b)^2-5a-5b+6$ 26. $x^2-px+qx-pq$
27. $a^2+1-\frac{6}{a^2}$ 28. $x^2+2ax+(a+b)(a-b)$

29. m^4+3m^2-28 30. $x^2+ax-(6a^2-5ab+b^2)$

31. a^4-5a^2+4

32. $(x^2-3x)^2-38(x^2-3x)-80$ [B. U. '15]

33. $a^6b^6-a^3b^3-6$ 34. $(a+b+c)^2-4(a+b+c)-21$

35. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-3$ [C. U. '46]

36. $(x+1)(x+3)(x-4)(x-6)+13$

37. $(x+5)(x+13)-9$ 38. $5-4x-x^2$ [S. F. '55]

39. x^3-x^2-6x 40. $56+6x-2x^2$.

§ 27. ax^2+bx+c আকৃতির দ্বিমাত্রিক রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণ।

ax^2+bx+c রাশিকে বিশ্লেষণ করিতে হইলে এরূপ দুইটি রাশি নির্ণয় করিবে যাহাদের গুণফল হইবে ac (অর্থাৎ x^2এর সহগ ও x-বর্জিত পদের গুণফল) এবং বৈজিক যোগফল হইবে b (অর্থাৎ xএর সহগ)। উদাহরণ দ্বারা এই প্রক্রিয়াটি পরিস্ফুট করা হইতেছে।

উদাহরণ 1. $4x^2+13x+9$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এখানে $a=4, b=13, c=9$; $ac=4\times 9=36$,

এবং $4+9=13=b$,

$$\therefore\ 4x^2+13x+9=4x^2+4x+9x+9$$
$$=(4x^2+4x)+(9x+9)$$
$$=4x(x+1)+9(x+1)$$
$$=(x+1)(4x+9).$$

উদা. 2. $10x^2-x-11$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এখানে $a=10, c=-11$, $\therefore\ ac=10\times -11$,

এবং $10-11=-1$ (x-এর সহগ)।

$$10x^2-x-11=10x^2+10x-11x-11$$
$$=(10x^2+10x)-(11x+11)$$
$$=10x(x+1)-11(x+1)$$
$$=(x+1)(10x-11).$$

উদা. 3. $6x^2+7x-20$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এখানে $a=6, c=-20, \therefore \; ac=-6\times 20=-120$
$=-12\times 10=-8\times 15$ এবং $+7=15-8$.

$$\therefore \; 6x^2+7x-20=6x^2+15x-8x-20$$
$$=(6x^2+15x)-(8x+20)$$
$$=3x(2x+5)-4(2x+5)$$
$$=(2x+5)\;(3x-4).$$

উদা. 4. $(a-1)x^2+a^2xy+(a+1)y^2$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এখানে $(a-1)(a+1)=a^2-1$ এবং $(a^2-1)+1=a^2$.

$$\therefore \; \text{রাশিটি}=(a-1)x^2+\{(a^2-1)+1\}xy+(a+1)y^2$$
$$=(a-1)x^2+(a^2-1)xy+xy+(a+1)y^2$$
$$=(a-1)x\{x+(a+1)y\}+y\{x+(a+1)y\}$$
$$=\{x+(a+1)y\}\{(a-1)x+y\}.$$

উদা. 5. $6(x^2-y^2)^2-7xy(x^2-y^2)-24x^2y^2$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

মনে কর, $x^2-y^2=a$ এবং $xy=b$, তাহা হইলে

$$\text{রাশিটি}=6a^2-7ab-24b^2=6a^2+9ab-16ab-24b^2$$
$$=(6a^2+9ab)-(16ab+24b^2)$$
$$=3a(2a+3b)-8b(2a+3b)=(2a+3b)(3a-8b)$$
$$=\{2(x^2-y^2)+3xy\}\{3(x^2-y^2)-8xy\}$$

[a ও bর মান বসাইয়া]

$$=(2x^2+3xy-2y^2)(3x^2-8xy-3y^2)$$
$$=(2x^2+4xy-xy-2y^2)(3x^2-9xy+xy-3y^2)$$
$$=\{2x(x+2y)-y(x+2y)\}\{3x(x-3y)+y(x-3y)\}$$
$$=(x+2y)(2x-y)(x-3y)(3x+y).$$

প্রশ্নমালা 15

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $4a^2-10a-6$
2. $5x^2+19x-4$
3. $5x^2+9x+4$
4. $3x^2-10x-25$
5. $3x^2-22x-25$
6. $8a^2-10a-7$
7. $6x^2-13x+6$
8. $6x^2+19x+10$
9. $10a^2-27a-28$
10. $6x^2-5x-6$
11. $12a^2-28ab-5b^2$
12. $3p^2-14pq+8q^2$
13. $6x^2+17xy-14y^2$
14. $3a^2-10ab+3b^2$
15. $21a^2-58a+21$
16. $12x^2-17xy+6y^2$
17. $2a^2-3ab-27b^2$
18. $99a^2-202ab+99b^2$ [A. U.]
19. $2(2x+y)^2-5(2x+y)+3$
20. $ax^2+(ab-1)x-b$
21. $21x^2+40xy-21y^2$ [D. B. '38]
22. $12x^2+65x+77$
23. $8x-3-4x^2$ [S. F. '54]
24. $17x-7x^2-6$ [S. F. '59]
25. $12x^2+7x-12$ [S. F. '58]
26. $14x-3x^2+5$ [S. F. '61]
27. $3(a+b)^2-2a-2b-8$ [S. F. '62]
28. $2a^6-13a^3-24$ [S. F. '63]
29. $8a^4+2a^2-45$ [S. F. '66]
30. $3(x+y)^2-10(x+y)(x-y)+3(x-y)^2$.
31. $12x^3-7x^2-10x$
32. $6x^2y+xy^2-15y^3$
33. $6(a+b)^2+5(a^2-b^2)-6(a-b)^2$
34. $30x^2y-33xy-18y$.

---

§ 28. x^2+px+q আকৃতির দ্বিমাত্রিক রাশিকে **দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ** করিয়া উৎপাদকে বিশ্লেষণ।

$$x^2+px+q=x^2+2x.\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2+q-\left(\frac{p}{2}\right)^2$$
$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2$$

দেখা গেল, x-এর সহগ p-এর অর্ধেকের বর্গ $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ যোগ এবং বিয়োগ করিলে, উক্ত রাশিটিকে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশিত করা যায়। নিম্নের উদাহরণগুলি হইতে নিয়মটি পরিস্ফুট হইবে।

উদা. 1. x^2+5x+6কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এখানে xএর সহগ 5, সুতরাং $(\frac{5}{2})^2$ যোগ ও বিয়োগ করিতে হইবে।

$$x^2+5x+6=x^2+2.x.\tfrac{5}{2}+(\tfrac{5}{2})^2+6-(\tfrac{5}{2})^2$$
$$=(x+\tfrac{5}{2})^2-(\tfrac{1}{2})^2=(x+\tfrac{5}{2}+\tfrac{1}{2})(x+\tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{2})$$
$$=(x+3)(x+2).$$

উদা. 2. x^2-x-12কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

$$x^2-x-12=x^2-2.x.\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{2})^2-12-(\tfrac{1}{2})^2$$
$$=(x-\tfrac{1}{2})^2-(\tfrac{7}{2})^2=(x-\tfrac{1}{2}+\tfrac{7}{2})(x-\tfrac{1}{2}-\tfrac{7}{2})$$
$$=(x+3)(x-4).$$

উদা. 3. $3x^2-4x-7$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

$$3x^2-4x-7=3(x^2-\tfrac{4}{3}x-\tfrac{7}{3})$$
$$=3\{x^2-2.x.\tfrac{2}{3}+(\tfrac{2}{3})^2-(\tfrac{2}{3})^2-\tfrac{7}{3}\}$$
$$=3[(x-\tfrac{2}{3})^2-(\tfrac{5}{3})^2]$$
$$=3(x-\tfrac{2}{3}+\tfrac{5}{3})(x-\tfrac{2}{3}-\tfrac{5}{3})=3(x+1)(x-\tfrac{7}{3})$$
$$=(x+1)(3x-7).$$

প্রশ্নমালা 16

নিম্ন রাশিগুলিকে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করিয়া উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $x^2-3x-28$
2. $x^2+2x-35$
3. $x^2-11x-42$
4. $8x^2+10xy-7y^2$
5. $3a^2+10a-25$
6. $3x^2-28x+25$
7. $3+a-10a^2$
8. $10x^2-21x+11$
9. $7x^2-30x+8$
10. $4x^2-8xy-5y^2$.

গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (গ. সা. গু.)

§ 29. **মৌলিক গুণনীয়ক** (Elementary factor).

কোন রাশিকে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিলে যে রাশিগুলি হয় তাহাদের যদি আর গুণনীয়ক না থাকে, তবে ঐ গুণনীয়ক রাশিগুলিকে মৌলিক গুণনীয়ক বলে। পূর্ব অধ্যায়ে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ প্রক্রিয়া সাধারণতঃ মৌলিক গুণনীয়কে বিশ্লেষণই বুঝাইয়াছে। a^2b^3 রাশিটির মৌলিক গুণনীয়ক a এবং bকে আর গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায় না।

§ 30. **সাধারণ গুণনীয়ক** (Common factor).

দুই বা ততোধিক রাশি যে রাশিদ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য সেই রাশিকে ঐ রাশিগুলির সাধারণ গুণনীয়ক বলে। যেমন, a^2b, ab^2c এই দুইটি রাশির সাধারণ গুণনীয়ক a, b এবং ab.

§ 31. **গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক** (গ. সা. গু.)।

দুই বা ততোধিক রাশির একাধিক সাধারণ গুণনীয়ক হইতে পারে। ইহাদের মধ্যে যে গুণনীয়কটির শক্তি বা মাত্রা সর্বোচ্চ সেইটিই রাশিগুলির গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক হইবে। যেমন, $2a^2b^3c^2$, $3a^4b^2c^3$, $4a^5b^3c^2$ এই তিনটি রাশির সাধারণ গুণনীয়ক হইল $a, b, c, a^2, b^2, c^2, ab, bc, ca, a^2b, a^2c, b^2c, bc^2, abc, a^2bc, ab^2c, abc^2, a^2b^2c^2$. ইহাদের মধ্যে $a^2b^2c^2$-ই সর্বোচ্চ মাত্রাবিশিষ্ট, সুতরাং $a^2b^2c^2$-ই নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে।

§ 32. **গ. সা. গু. নির্ণয় প্রণালী**।

(1) প্রথমে রাশিগুলিকে মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

(2) সাধারণ মৌলিক গুণনীয়কগুলির যে সর্বোচ্চ-শক্তি রাশিগুলিকে সম্পূর্ণরূপে ভাগ করে, তাহাদের গুণফলই গ. সা. গু.।

(3) রাশিগুলির সাংখ্য সহগগুলির গ. সা. গু.-ই গ. সা. গু.-র সাংখ্য সহগ হইবে।

উদাহরণ 1. $3xy^2z^2$, $2yz^2x^2$ এবং x^2y^2zএর গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

এই তিনটি রাশির মৌলিক সাধারণ গুণনীয়ক x, y ও z, ইহাদের যে উচ্চতম শক্তি ইহাদিগকে নিঃশেষে ভাগ করে তাহারা হইল x, y, z. $\therefore$ গ. সা. গু. $= xyz$.

উদা. 2. $16a^2b^3x^4y^5$, $40a^3b^2x^3y^4$, $24a^5b^5x^6y^4$এর গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

16, 40 ও 24এর গ. সা. গু.$=8$.

a, b, x, y সাধারণ মৌলিক গুণনীয়ক ; ইহাদের যে যে উচ্চতম শক্তি রাশিগুলিকে নিঃশেষে ভাগ করে, তাহারা হইতেছে a^2, b^2, x^3, y^4.

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু.$=8a^2b^2x^3y^4$.

উদা. 3. a^3-b^3, a^2-b^2 এবং $(a-b)^3$এর গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$,

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, এবং $(a-b)^3=(a-b)^3$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু.$=a-b$.

উদা. 4. x^4-1, x^4-x^3+x-1এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)=(x^2+1)(x+1)(x-1)$;

$x^4-x^3+x-1=x^3(x-1)+1(x-1)$

$=(x-1)(x^3+1)=(x-1)(x+1)(x^2-x+1)$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু.$=(x+1)(x-1)=x^2-1$.

উদা. 5. $x^3-5x^2+6x, x^3+4x^2-12x, x^3-9x^2+14x$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

প্রথম রাশি $= x(x^2-5x+6) = x(x-2)(x-3)$

দ্বিতীয় রাশি $= x(x^2+4x-12) = x(x-2)(x+6)$

তৃতীয় রাশি $= x(x^2-9x+14) = x(x-2)(x-7)$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $= x(x-2)$.

উদা. 6. a^2-1, a^3-1, এবং a^2+a-2এর গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

প্রথম রাশি $=(a+1)(a-1)$

দ্বিতীয় রাশি $=(a-1)(a^2+a+1)$

তৃতীয় রাশি $= a^2+2a-a-2=(a-1)(a+2)$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $= a-1$.

প্রশ্নমালা 17

নিম্ন রাশিগুলির গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. ab এবং ac
2. a^2b এবং b^2c
3. a^3b^2, a^2b^3
4. $3a^3b^4, 9a^4b^3$
5. $3a^2b^3c^2, 6a^5b^3c^4, 18a^4b^3c^2$
6. $x^5y^7z^9, 3x^3y^5z^7$ এবং $4x^2y^4$
7. $a(b+c), c(b+c)$
8. $a^2(b+c)^2, a^3(b+c)$,
9. $(a+b)^3c^2, c^2(a+b)$
10. $(a+b)^2(c+d), (a+b)(c+d)^2$
11. $3(a+b)^3(c+d)^2, 4(a+b)^2(c+d)^3$
12. $(a^2-b^2), (a^3-b^3)$
13. $(a+b)^2, a^2-b^2$
14. $a^3-ab^2, ac-bc$
15. $(a^2-b^2)(b^2+c^2), (a^3-b^3)(b^3-c^3)$
16. $(a-b)^2(a+b)^2, a^2-b^2$
17. $(x^2-y^2), (x-y)^3$ এবং x^3-y^3
18. $3(x+y)^3, 6(x+y)^2, 9(x^2-y^2)$
19. $x^3-y^3, x^3-x^2y+xy^2-y^3$
20. $ax^2-(a+1)x+1, bx^2-(b-1)x-1$
21. $x^2-y^2, x^3-y^3, 3x^2-5xy+2y^2$
22. x^2-x-2, x^2+2x+1
23. $x^2-2x-3, x^2+5x+4, x^2+7x+6$

24. $x^3-3x^2-10x,\ x^3+6x^2+8x,\ x^4-5x^3-14x^2$

25. $a^2+b^2-c^2+2ab,\ a^2-b^2-c^2+2bc$

26. $3x^3+11x^2+13x+5,\ 3x^3+12x^2+16x+7$ [S. F. '54]

27. $x^2+3x-10,\ x^3-x^2-14x+24$ [S. F. '56]

28. $x^2-5x+6,\ x^2-3x+2,\ 3x^3-18x^2+33x-18$ [S. F. '57]

29. $x^3-1,\ x^2+2x-3,\ x^3-x^2+x-1$ [S. F. '58]

30. $4a^2+8a-12,\ 6a^2+24a-30.$

লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক
(Lowest Common Multiple)
(উৎপাদক সাহায্যে নির্ণয়)

§ 33. **গুণিতক।** একটি রাশি অপর একটি রাশিকে নিঃশেষে ভাগ করিলে দ্বিতীয় রাশিটি প্রথম রাশির **গুণিতক** (Multiple) হইবে। যেমন a^3 রাশিটি a^2 ও a দ্বারা বিভাজ্য। সুতরাং a^3 হইল a^2 ও aএর গুণিতক।

§ 34. **সাধারণ গুণিতক।** দুই বা ততোধিক রাশিদ্বারা যে যে রাশি সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য সেই সেই শেষোক্ত রাশি ঐ ঐ প্রথমোক্ত রাশির গুণিতক। যেমন, a ও b দ্বারা ab, a^2b^2, a^2b ইত্যাদি রাশি বিভাজ্য ; এই শেষোক্ত রাশিগুলি a ও bএর সাধারণ গুণিতক।

§ 35. **লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক।** দুই বা ততোধিক রাশির দ্বারা যে যে রাশি সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য সেই সেই শেষোক্ত রাশির মধ্যে সর্বনিম্ন মাত্রাবিশিষ্ট রাশিটিই ঐ ঐ প্রথমোক্ত রাশির **লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক** বা সংক্ষেপে ল. সা. গু. (L. C. M.)। যেমন a^2 ও b^2এর সাধারণ গুণিতক হইল a^2b^2, a^3b^3, a^3b^2 ইত্যাদি। ইহাদের মধ্যে সর্বনিম্ন মাত্রাবিশিষ্ট রাশি হইল a^2b^2। অতএব a^2 ও b^2এর ল. সা. গু. হইল a^2b^2.

36. ল. সা. গু. নির্ণয় পদ্ধতি।

প্রত্যেক রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া, উক্ত উৎপাদকগুলির প্রত্যেকটির যে মাত্রা রাশিগুলির মধ্যে সর্বোচ্চ সেই সর্বোচ্চ মাত্রাযুক্ত উৎপাদকগুলির গুণফলই রাশিগুলির ল. সা. গু. হইবে; সাংখ্য-সহগগুলির ল. সা. গু.-ই ল. সা. গু.-র সাংখ্য-সহগ হইবে।

উদাহরণ 1. a^2bc, ab^2c, abc^2এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

রাশিগুলিতে a, b ও c এই তিনটি অক্ষরই আছে; ইহাদের সর্বোচ্চ ঘাত যথাক্রমে a^2, b^2 ও c^2; সুতরাং ইহাদের ল. সা. গু. হইবে $a^2b^2c^2$।

উদা. 2. $5x^3y^2z, 10x^4y^3z^2, 15y^3z$এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

5, 10, 15এর ল. সা. গু. $=30$. x^3, x^4এর ল. সা. গু. $=x^4$;
y^2, y^3, y^3এর ল. সা. গু. $=y^3$; z, z^2এর ল. সা. গু. $=z^2$.
$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $=30\times x^4\times y^3\times z^2=30x^4y^3z^2$.

উদা. 3. $a^2-b^2, a^3-b^3, (a+b)^2$এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $=(a+b)(a-b)$
দ্বিতীয় রাশি $=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
তৃতীয় রাশি $=(a+b)^2$
$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)^2$
$=(a^3-b^3)(a+b)^2$

উদা. 4. $x^2-x-2,\ x^2+x-6,$ এবং x^2-2x+1এর ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

প্রথম রাশি $=x^2-2x+x-2=x(x-2)+1(x-2)$
$=(x-2)(x+1)$.
দ্বিতীয় রাশি $=x^2+3x-2x-6=x(x+3)-2(x+3)$
$=(x+3)(x-2)$.
তৃতীয় রাশি $=x^2-2x+1=(x-1)^2$.
$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $=(x-2)(x+1)(x+3)(x-1)^2$.

প্রশ্নমালা 18

নিম্ন রাশিগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় কর :—

1. ab, bc 2. a^2b, ab^2 3. abc, a^2bc 4. $6a^2bc, 8abc^2$
5. $3ab(b+c), 5bc(b+c)$ 6. $2cd(c-d), 4e(c-d)^2$
7. $15a^2c^2(a-c), 20ac(a-c)^2$
8. $4x^5y^2z^3, 8x^3y^3z^4, 10x^4y^4z$
9. $(a-b)^2, (a+b)^2, (a^3+b^3)$
10. $(x+y)(y+z), (y+z)(z+x), (z+x)(x+y)$
11. $(x+1)(x+2), (x+2)(x+3), (x+3)(x+4)$
12. $x^4-y^4, x^3-y^3, (x-y)^3$
13. $ab-bx-ay+xy$ এবং $ab-bx+ay-xy$
14. $x^6-y^6, x^8+x^4y^4+y^8$ 15. a^2-1, a^3-1, a^2+a-2
16. $a^2-b^2, a^3-b^3, 3a^2-5ab+2b^2$
17. $x^2+(a-b)x-ab, x^2+(a+b)x+ab$
18. $a^2-b^2-c^2-2bc, b^2-c^2-a^2-2ca$
19. $x^3+y^3, x^3-y^3, x^4+x^2y^2+y^4$
20. $2a^2-5a+3, 4a^2-4a-3, 3a^2-a-2$
21. $x^2-7x+12, x^2-9x+20, x^2-x-12$
22. $3(x^2+xy), 8(xy-y^2), 5(x^2-y^2)$
23. $x^2-3x+2, x^3-4x, x^4+x^3-6x^2$ [C. U. '36]
24. x^3-3x^2+x-3, x^4+6x^2+5
25. $a^2-b^2-c^2+2bc, (a+b-c)^2, a^2+c^2-b^2+2ac$ [C. U. '40]
26. $x^2-3x+2, x^3+2x^2-3x, x^4+x^3-6x^2$ [S. F. '56]
27. $x^2+x-6, x^2+5x+6, x^3+x^2-4x-4$ [S. F. '57]
28. a^3-1, a^4-1, a^4+a^2+1
29. $2x^2+3x-2, 3x^2+7x+2, 6x^2-x-1$ [S. F. '58]
30. $3x^2-15x+18, 2x^2+2x-24, 4x^2+36x+80$ [S. F. '59]
31. $6x^2-5x-6, 16x^4+36x^2+81, 8x^3-27$ [S. F. '63]
32. $x^2+7x+10, x^3-x^2-6x, x^4-15x^2+2x^3$ [S. F. '68]
33. $6x^2-x-1, 3x^2+7x+2, 2x^2+3x-2$ [S. F. '70]
34. $x(x^2-4), x^4+6x^3+8x^2, x^2+2x-8.$ [S. F. '72]

দুইটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট সমীকরণ

§ **37.** পাটীগণিতীয় বিবিধ প্রশ্নে দুইটি অজ্ঞাত রাশি থাকিলে ঐ প্রশ্নের সমাধানে ঐ দুই অজ্ঞাত রাশিকে x ও y ধরিয়া প্রশ্নের শর্ত দুইটিকে দুইটি সমীকরণের আকারে প্রথমে রূপান্তরিত করিতে হয়। এই প্রকার দুইটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট সমীকরণকে সহসমীকরণ বলে। এই দুই সমীকরণ সমাধান করিয়া প্রশ্নের অজ্ঞাত রাশি দুইটি নির্ণয় করা যাইবে। অতএব, এক্ষণে এইরূপ সহসমীকরণ সমাধান প্রণালী নিম্নে প্রদত্ত হইল।

(A) **তুলনামূলক পদ্ধতি** (Method of Comparison) :

উদাহরণ। সমাধান কর : $\left.\begin{array}{l}2x+3y=7\cdots(1)\\5x-2y=8\cdots(2)\end{array}\right\}$

(1) হইতে পাই $3y=7-2x$, $\therefore\ y=\dfrac{7-2x}{3}\cdots(3)$

(2) হইতে পাই $-2y=8-5x$, বা, $2y=5x-8$,

$$\therefore\ y=\frac{5x-8}{2}\cdots(4)$$

(3) ও (4) তুলনা করিয়া দেখা যায় যে সমীকরণ দুইটির বামপক্ষ সমান, সুতরাং উহাদের ডানপক্ষ দুইটিও পরস্পর সমান হইবে।

$\therefore\ \dfrac{7-2x}{3}=\dfrac{5x-8}{2}$, বা, $3(5x-8)=2(7-2x)$

[বজ্রগুণন দ্বারা],

বা, $15x-24=14-4x$, বা, $15x+4x=14+24$,

বা, $19x=38$, $\therefore\ x=\dfrac{38}{19}=2.$

এক্ষণে, (3)এ xএর মান 2 বসাইয়া পাই

$y=\dfrac{7-2\times 2}{3}=\dfrac{3}{3}=1.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান হইল $x=2$, $y=1$.

(B) **পরিবর্ত পদ্ধতি** (Method of Substitution) :

উদাহরণ। সমাধান কর : $\left.\begin{array}{l}3x+7y=26\\5y+4x=13\end{array}\right\}$

প্রথম সমীকরণ হইতে পাই $7y=26-3x$,

$\therefore\ y=\frac{26-3x}{7}\cdots(1)$

দ্বিতীয় সমীকরণে y এর পরিবর্তে $\frac{26-3x}{7}$ বসাইয়া পাই

$\frac{5(26-3x)}{7}+4x=13$,

বা, $130-15x+28x=91$ [উভয় পক্ষকে 7 দিয়া গুণ করিয়া]

বা, $13x=91-130=-39$, $\therefore\ x=-\frac{39}{13}=-3$.

এক্ষণে (1)এ xএর মান -3 বসাইয়া পাই

$y=\frac{26-3\times-3}{7}=\frac{35}{7}=5$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান হইল $x=-3$, $y=5$.

(C) **অপনয়ন পদ্ধতি** (Method of Elimination) :

এই পদ্ধতিতে প্রথম সমীকরণের একটি অক্ষরের সহগ দ্বারা দ্বিতীয় সমীকরণকে গুণ করিয়া এবং দ্বিতীয় সমীকরণের সেই অক্ষরের সহগ দ্বারা প্রথম সমীকরণকে গুণ করিয়া যে দুইটি সমীকরণ পাওয়া যাইবে তাহাদিগকে যোগ বা বিয়োগ করিলে সেই অক্ষরটি বিলুপ্ত হইয়া অপর অক্ষরের একটি সমীকরণ পাওয়া যাইবে ; ইহাকে সমাধান করিয়া বিলুপ্ত অক্ষরটিরও সমাধান করা যাইবে। নিম্নে এই পদ্ধতির উদাহরণ প্রদত্ত হইল।

উদাহরণ। সমাধান কর : $\left.\begin{array}{l}4x+3y=20\\6x-y=8\end{array}\right\}$

প্রথম সমীকরণকে দ্বিতীয় সমীকরণের xএর সহগ 6 দ্বারা গুণ করিয়া পাই $24x+18y=120\cdots(i)$

আবার দ্বিতীয় সমীকরণকে প্রথম সমীকরণের xএর সহগ 4 দ্বারা গুণ করিয়া পাই $24x-4y=32\cdots$(ii)

এক্ষণে (i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$22y=88, \quad \therefore \quad y=\tfrac{88}{22}=4.$$

এখন প্রথম সমীকরণে yএর মান 4 বসাইয়া পাই,

$4x+3\times4=20$, বা, $4x=20-12=8$, $\therefore \; x=2.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান হইল $x=2,\ y=4.$

(D) **বজ্রগুণন প্রণালী**: বজ্রগুণন বা আড়গুণন কাহাকে বলে তাহা তোমরা জান। যদি দুইটি ভগ্নাংশ সমান হয়, তবে প্রথমটির লব ও দ্বিতীয়টির হরের গুণফল=প্রথমটির হর ও দ্বিতীয়টির লবের গুণফল হয়। দুইটি সমান রাশিকে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে গুণফল দুইটিও সমান হয়—ইহা একটি স্বতঃসিদ্ধ। এখন দেখ, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হইলে $a\times d=b\times c$ হইবে, অর্থাৎ $ad=bc$ হইবে। ইহাকে বলে বজ্রগুণন (Cross multiplication). ইহার প্রমাণ দেখ।

$\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \therefore \frac{a}{b}\times bd=\frac{c}{d}\times bd$ [উভয় পক্ষকে bd দ্বারা গুণ করায় গুণফল দুইটি সমান হইল] $\therefore \; ad=bc$ হইল।

উদাহরণ 1. সমাধান কর:
$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{3}=\frac{y}{4}\cdots(1) \\ 7x-5y=2\cdots(2) \end{aligned}\right\}$$

(1) হইতে বজ্রগুণন দ্বারা পাই $4x=3y$, বা $4x-3y=0\cdots(3)$

এক্ষণে (2) ও (3)কে সমাধান করিতে হইবে।

(2)কে 3 দ্বারা এবং (3)কে 5 দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$21x-15y=6$

এবং $20x-15y=0$

(বিয়োগ) $x \quad =6$; এক্ষণে (2) হইতে পাই $7\times6-5y=2$,

বা, $-5y=2-42=-40$, $\therefore \; y=\frac{-40}{-5}=8.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান হইল $x=6,\ y=8.$

উদা. 2. সমাধান কর : $\frac{x+y}{xy}=\frac{5}{6}$ এবং $\frac{x-y}{xy}=\frac{1}{6}$.

প্রথম সমীকরণ হইতে পাই $\frac{x}{xy}+\frac{y}{xy}=\frac{5}{6}$, বা, $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{5}{6}\cdots$(i)

দ্বিতীয় " " " $\frac{x}{xy}-\frac{y}{xy}=\frac{1}{6}$, বা, $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{1}{6}\cdots$(ii)

যোগ করিয়া $\frac{2}{y}=\frac{6}{6}=1.$

$\therefore$ $y=2$ [বজ্রগুণন দ্বারা]

এক্ষণে (i)এ yএর মান বসাইয়া পাই,

$\frac{1}{2}+\frac{1}{x}=\frac{5}{6}$, বা, $\frac{1}{x}=\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. $\therefore$ $x=3$ [বজ্রগুণন দ্বারা]

$\therefore$ সমাধান হইল $x=3$, $y=2$.

প্রশ্নমালা 19

সমাধান কর (Solve) :

1. $\left.\begin{array}{l}2x+3y=8\\7x+4y=15\end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{l}5x+3y=11\\2x-7y=-12\end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{l}3x+4y=5\\5x+12y=3\end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{l}2x-3y=8\\5x+7y=-9\end{array}\right\}$

5. $\left.\begin{array}{l}7x+5y=11\\4x-3y=18\end{array}\right\}$

6. $\left.\begin{array}{l}4x+9y=5\\8x-3y=3\end{array}\right\}$

7. $\left.\begin{array}{l}3x+8y=1\\4y-9x=4\end{array}\right\}$

8. $\left.\begin{array}{l}2x-\frac{3}{y}=3\\8x+\frac{15}{y}=-6\end{array}\right\}$

9. $\left.\begin{array}{l}8x+5y-11=0\\3x-4y-10=0\end{array}\right\}$

10. $3x+4y-17=0=4x-3y-6$

11. $\left.\begin{array}{l}\frac{3x}{4}+\frac{2y}{3}=5\\\frac{9x}{4}-\frac{5y}{3}=4\end{array}\right\}$

12. $\left.\begin{array}{l}\frac{x+y}{xy}=2\\\frac{x-y}{xy}=1\end{array}\right\}$ [D. B. '31]

13. $\left.\begin{array}{l}\frac{x}{5}=\frac{y}{4}\\3x+5y=70\end{array}\right\}$

14. $xy=(x+3)(y-1)=(x-2)(y+1)$

15. $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=6\\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=2\end{array}\right\}$ 16. $\left.\begin{array}{l}\frac{8}{x}-\frac{9}{y}=1\\ \frac{10}{x}+\frac{6}{y}=7\end{array}\right\}$ 17. $\left.\begin{array}{l}\frac{x-3}{5}=\frac{y-7}{2}\\ 11x=13y\end{array}\right\}$

18. $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=3x-7y-37=0$

19. $\left.\begin{array}{l}\frac{2}{x}+3y=15\\ \frac{5}{x}-4y=3\end{array}\right\}$ 20. $\left.\begin{array}{l}\frac{4x-3y}{xy}=9\\ \frac{2y-x}{xy}=4\end{array}\right\}.$

§ 38. সহ-সমীকরণসাধ্য প্রশ্নাবলী

পূর্বেই শিখিয়াছ যে পাটীগণিতীয় বিবিধ প্রশ্নে একটি অজ্ঞাত রাশি থাকিলে তাহাকে x ধরিয়া প্রদত্ত শর্তকে একটি সমীকরণের আকারে রূপান্তরিত করিতে হয়। তখন ঐ সমীকরণটি সমাধান করিয়া xএর যে মান পাওয়া যায়, তাহাই প্রশ্নের নির্ণেয় অজ্ঞাত রাশি।

এখন যদি কোন প্রশ্নে তুইটি অজ্ঞাত রাশি থাকে, তবে অবশ্যই প্রশ্নে তুইটি পরস্পর নিরপেক্ষ শর্ত থাকিবে। সেক্ষেত্রে ঐ অজ্ঞাত রাশি তুইটি x ও y ধরিয়া প্রদত্ত শর্ত তুইটিকে তুইটি সমীকরণের আকারে রূপ দিতে হইবে। তখন ঐ সমীকরণদ্বয় সমাধান করিলে প্রশ্নের অজ্ঞাত রাশি তুইটি পাওয়া যাইবে। নিম্নের উদাহরণগুলি দেখ।

উদাহরণ 1. তুইটি সংখ্যার সমষ্টি 11 এবং উহাদের অন্তর 5; সংখ্যা তুইটি কত?

মনে কর, একটি সংখ্যা x এবং অন্যটি y, এবং $x>y$.

এক্ষণে, প্রথম শর্ত হইতে পাই $x+y=11\cdots(1)$

এবং দ্বিতীয় ,, ,, ,, $x-y=5\cdots(2)$

এখন এই সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া x ও yএর মান নির্ণয় করিতে হইবে।

$$x+y=11$$
$$x-y=5$$

যোগ করিয়া $2x=16$, $\therefore$ $x=8$.

(1)এ xএর মান 8 বসাইয়া পাই $8+y=11$, $\therefore$ $y=11-8=3$.

অতএব, নির্ণেয় সংখ্যা দুইটি 8 ও 3.

উদা. 2. দুইটি সংখ্যার অন্তর 68 এবং বড় সংখ্যাটিকে ছোটটি দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল হয় 5; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

মনে কর, বড় সংখ্যাটি x এবং ছোটটি y.

প্রদত্ত শর্তদ্বয় অনুসারে $x-y=68\cdots(1)$ এবং $\frac{x}{y}=5\cdots(2)$

(2) হইতে পাই $x=5y$. (1)-এ xএর স্থানে $5y$ বসাইয়া পাই,

$5y-y=68$, বা, $4y=68$, $\therefore$ $y=17$.

$\therefore$ $x=5y=5\times17=85$.

অতএব, নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় 85 ও 17.

উদা. 3. 5টি ঘোড়া ও 7টি গরুর মূল্য একত্রে 8700 টাকা এবং 3টি ঘোড়া ও 4টি গরুর মূল্য একত্রে 5100 টাকা; প্রত্যেক ঘোড়া ও গরুর মূল্য কত?

মনে কর, একটি ঘোড়ার মূল্য x টাকা এবং একটি গরুর মূল্য y টাকা।

প্রদত্ত শর্তদ্বয় হইতে পাই $5x+7y=8700\cdots(1)$
এবং $3x+4y=5100\cdots(2)$

(1)কে 3 দ্বারা এবং (2)কে 5 দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$15x+21y=26100$$
এবং $$15x+20y=25500$$

(বিয়োগ করিয়া) $y=\ \ 600$

এক্ষণে (2) হইতে পাই, $3x+4\times600=5100$,

বা, $3x=5100-2400=2700$, $\therefore$ $x=900$.

অতএব, একটি ঘোড়ার মূল্য 900 টাকা এবং একটি গরুর মূল্য 600 টাকা।

উদা. 4. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 5 মি. কম ও প্রস্থ 3 মি. অধিক হইলে ক্ষেত্রফল 9 বর্গমিটার কম হয়। আবার, দৈর্ঘ্য 3 মি. ও প্রস্থ 2 মি. বেশী হইলে ক্ষেত্রফল 67 বর্গমিটার বেশী হয়। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

মনে কর, দৈর্ঘ্য x মিটার ও প্রস্থ y মিটার,

সুতরাং ক্ষেত্রফল $= xy$ বর্গমিটার।

প্রথম শর্ত হইতে পাই $(x-5)(y+3)=xy-9 \cdots (1)$

দ্বিতীয় " " " $(x+3)(y+2)=xy+67 \cdots (2)$

এখন (1) হইতে পাই, $xy+3x-5y-15=xy-9$,

বা, $3x-5y=15-9=6 \cdots (3)$.

(2) হইতে পাই $xy+2x+3y+6=xy+67$,

বা, $2x+3y=67-6=61 \cdots (4)$

এক্ষণে (3)কে 2 দিয়া ও (4)কে 3 দিয়া গুণ করিয়া পাই

$$6x-10y=12$$

এবং $$6x+9y=183$$

(বিয়োগ) $$-19y=-171, \quad \therefore \quad y=\frac{-171}{-19}=9$$

এক্ষণে (3) হইতে $3x-5\times 9=6$, বা, $3x=51$, $\therefore x=17$.

অতএব, নির্ণেয় দৈর্ঘ্য 17 মিটার ও প্রস্থ 9 মিটার।

[অঙ্ক (digit) সম্বন্ধীয়]

যদি আমরা কোন সংখ্যার এককের অঙ্ক x এবং দশকের অঙ্ক y ধরি, তবে সংখ্যাটি হইবে $10y+x$, ইহা তোমরা জান। ছাত্ররা প্রায়ই সংখ্যা (number) ও অঙ্ক (digit) গোলমাল করিয়া ফেলে।

উদা. 1. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্ক দুইটির সমষ্টি 9 এবং অঙ্কগুলি পরস্পর স্থান বিনিময় করিলে যে সংখ্যা হয় তাহা পূর্ব সংখ্যা অপেক্ষা 27 বেশী। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

মনে কর, সংখ্যাটির এককের অঙ্ক x এবং দশকের অঙ্ক y, সুতরাং সংখ্যাটি হইল $10\times y+x$ অর্থাৎ $10y+x$. এই অঙ্কদ্বয় পরস্পর স্থান বিনিময় করিলে নূতন সংখ্যাটি হয় $10x+y$.

প্রদত্ত শর্তদ্বয় হইতে পাই $x+y=9 \cdots (1)$

এবং $10x+y=10y+x+27$, বা, $9x-9y=27$,

বা, $x-y=3 \cdots (3)$

এখন (1) ও (3) সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া পাই $x=6$, $y=3$. $\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি$=10\times3+6=36$.

উদা. 2. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কগুলির সমষ্টি 11; উহার বামদিকের অঙ্কটি 2 বৃদ্ধি পাইলে উহা (অঙ্কটি) সংখ্যাটির $\frac{1}{8}$ হইবে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর। [C. U. '36]

মনে কর, x ও y যথাক্রমে একক ও দশক স্থানীয় অঙ্ক।

$\therefore$ সংখ্যাটি $10y+x$. প্রদত্ত শর্তদ্বয় হইতে পাই $x+y=11 \cdots (1)$

এবং $y+2=\frac{1}{8}(10y+x) \cdots (2)$

(2) হইতে পাই $8y+16=10y+x$,

বা, $2y+x=16 \cdots (3)$.

(1) ও (3) সমাধান করিয়া পাই $x=6$, $y=5$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=10\times5+6=56$.

উদা. 3. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যা এবং ঐ অঙ্কদ্বয় উল্টাইয়া দিলে যে সংখ্যা হয় তাহাদের সমষ্টি 110 এবং উভয় অঙ্কের অন্তর 6; সংখ্যাটি কত? [A. U. '28]

মনে কর, x ও y যথাক্রমে একক ও দশকস্থানীয় অঙ্ক; সুতরাং সংখ্যাটি$=10y+x$.

অতএব, $(10y+x)+(10x+y)=110 \ldots (1)$,

এবং $x-y=6$, অথবা, $y-x=6 \cdots (2)$.

(1) হইতে পাই $11x+11y=110$, $\therefore$ $x+y=10 \cdots (3)$

এখন (2) ও (3) সমাধান করিলে পাই $x=8$, $y=2$; বা, $x=2$, $y=8$. অতএব, সংখ্যাটি 28 অথবা 82.

[এককের অঙ্ক বড় ধরিলে 28; দশকের অঙ্ক বড় ধরিলে 82].

[ভগ্নাংশ সম্বন্ধীয়]

উদা. 1. কোন ভগ্নাংশের লব হইতে 1 ও হর হইতে 2 বিয়োগ করিলে উহা 1এর সমান হয় এবং লব হইতে 2 ও হর হইতে 1 বিয়োগ করিলে উহা $\frac{3}{4}$এ পরিণত হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

মনে কর, ভগ্নাংশটির লব x ও হর y, সুতরাং ভগ্নাংশটি হইল $\frac{x}{y}$,

প্রথম শর্ত হইতে পাই $\frac{x-1}{y-2}=1$, অর্থাৎ $x-1=y-2$,

বা, $x-y=-1\cdots(1)$.

দ্বিতীয় শর্ত হইতে পাই $\frac{x-2}{y-1}=\frac{3}{4}$, অর্থাৎ $4x-8=3y-3$,

বা, $4x-3y=5\cdots(2)$

এক্ষণে (1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই $x=8$, $y=9$.

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $=\frac{8}{9}$.

উদা. 2. কোন ভগ্নাংশের লব ও হরে 1 যোগ করিলে উহা $\frac{4}{5}$এ পরিণত হয় এবং লব ও হর হইতে 5 বিয়োগ করিলে উহা $\frac{1}{2}$এর সমান হয়। ভগ্নাংশটি কত?

[C. U. '16]

মনে কর, ভগ্নাংশটি $\frac{x}{y}$. প্রদত্ত শর্তদ্বয় হইতে পাই

$\frac{x+1}{y+1}=\frac{4}{5}\cdots(1)$ এবং $\frac{x-5}{y-5}=\frac{1}{2}\cdots(2)$.

(1) হইতে পাই $5x+5=4y+4$, বা, $5x-4y=-1\cdots(3)$

এবং (2) হইতে পাই $2x-10=y-5$, বা, $2x-y=5\cdots(4)$.

এখন $(3)\times 1$ ও $(4)\times 4$ করিয়া পাই

$$\begin{array}{rl} & 5x-4y=-1 \\ & 8x-4y=\ \ 20 \\ \hline (\text{বিয়োগ}) & -3x \qquad =-21 \end{array}$$

$\therefore x=7$, এবং (4) হইতে পাই

$14-y=5$, বা, $-y=-9$, $\therefore y=9$. $\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $=\frac{7}{9}$

[বয়স সম্বন্ধীয়]

উদা. 1. 7 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 5 গুণ ছিল। 3 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 3 গুণ হইবে। বর্তমানে তাহাদের বয়স কত ?

মনে কর, পিতার ও পুত্রের বর্তমান বয়স যথাক্রমে x ও y বৎসর।

প্রদত্ত প্রথম শর্ত হইতে পাই $x-7=5(y-7)$,
বা, $x-7=5y-35$, বা, $x-5y=-28 \cdots (1)$.
দ্বিতীয় শর্ত হইতে পাই $x+3=3(y+3)$,
বা, $x-3y=9-3=6 \cdots (2)$.
এখন (1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই $x=57$, $y=17$.
$\therefore$ বর্তমানে পিতার বয়স 57 বৎসর ও পুত্রের বয়স 17 বৎসর।

উদা. 2. 3 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 5 গুণ ছিল। 4 বৎসর পরে পিতার বয়স 4 বৎসর পূর্বে পুত্রের যত বয়স ছিল তাহার 7 গুণ হইবে। উভয়ের বর্তমান বয়স কত ?

মনে কর, পিতার ও পুত্রের বর্তমান বয়স যথাক্রমে x ও y বৎসর।

প্রথম শর্ত হইতে পাই $x-3=5(y-3)$,
বা, $x-5y=3-15=-12 \cdots (1)$
দ্বিতীয় শর্ত হইতে পাই $x+4=7(y-4)$,
বা, $x-7y=-4-28=-32 \cdots (2)$
এক্ষণে (1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই $x=38$, $y=10$.
$\therefore$ বর্তমানে পিতার বয়স 38 বৎসর ও পুত্রের বয়স 10 বৎসর।

[নৌকা ও স্রোতের বেগ]

স্থির জলে অর্থাৎ নদীতে স্রোত না থাকিলে নৌকার গতিবেগ যত, এক ঘন্টায় নৌকা ততদূর যায়। যদি স্রোত থাকে, তবে

(1) স্রোতের অনুকূলে অর্থাৎ স্রোত যে দিকে বহিতেছে সেই দিকে (with the stream or current, down-stream, down the river) নৌকা যাইবার সময় নৌকার গতি ও স্রোতের গতির সমষ্টি যত, এক ঘণ্টায় নৌকা ততদূর যায়, কিন্তু (2) স্রোতের প্রতিকূলে বা বিপরীত দিকে (against the current, up-stream or up the river) নৌকা যাইবার সময় নৌকার গতি ও স্রোতের গতির অন্তর যত, নৌকা এক ঘণ্টায় ততদূর যায়।

উদা. 1. এক ব্যক্তি স্রোতের সঙ্গে 10 ঘণ্টায় 70 কি. মি. নৌকা বাহিয়া যায় এবং 70 ঘণ্টায় ফিরিয়া আসে। ঘণ্টায় নৌকার ও স্রোতের বেগ কত?

মনে কর, ঘণ্টায় নৌকার বেগ x কি. মি. ও স্রোতের বেগ y কি. মি.।

স্রোতের সঙ্গে নৌকা ঘণ্টায় $(x+y)$ কি. মি. যায় এবং ফিরিবার সময় স্রোতের বিপরীতে ফিরিতে হয় বলিয়া ঘণ্টায় $(x-y)$ কি. মি. যায়।

এখন প্রদত্ত শর্তদ্বয় হইতে পাই

$$\frac{70}{x+y}=10\cdots(1) \text{ এবং } \frac{70}{x-y}=70\cdots(2)$$

(1) হইতে পাই $10(x+y)=70$, বা, $x+y=7\cdots(3)$

এবং (2) ,, ,, $70(x-y)=70$, বা, $x-y=1\cdots(4)$

এক্ষণে, (3) ও (4) সমাধান করিয়া পাই $x=4$, $y=3$.

অতএব, ঘণ্টায় নৌকার গতিবেগ 4 কিলো মিটার এবং স্রোতের গতিবেগ 3 কিলো মিটার।

উদা. 2. একটি নৌকা অনুকূল স্রোতে 30 কি. মি. ও প্রতিকূল স্রোতে 20 কি. মি. 10 ঘণ্টায় যায় এবং স্রোতের অনুকূলে 24 কি.মি. ও প্রতিকূলে 32 কি.মি. যায় 12 ঘণ্টায়। নৌকার ও স্রোতের গতিবেগ নির্ণয় কর।

মনে কর, ঘণ্টায় নৌকার গতি x কি.মি. ও স্রোতের গতি y কি. মিটার। অতএব, স্রোতের অনুকূলে ঘণ্টায় নৌকাটি $x+y$ কি. মি. এবং প্রতিকূলে ঘণ্টায় $x-y$ কি. মি. যায়।

প্রদত্ত শর্তদ্বয় হইতে পাই $\frac{30}{x+y}+\frac{20}{x-y}=10 \cdots(1)$

এবং $\frac{24}{x+y}+\frac{32}{x-y}=12 \cdots(2)$

এক্ষণে, (1)কে 4 দ্বারা ও (2)কে 5 দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$\frac{120}{x+y}+\frac{80}{x-y}=40$$

এবং $$\frac{120}{x+y}+\frac{160}{x-y}=60$$

(বিয়োগ করিয়া) $-\frac{80}{x-y}=-20$, বা, $\frac{80}{x-y}=20$,

বা, $20(x-y)=80$ বা, $x-y=4 \cdots(3)$

এখন (1)-সমীকরণে $x-y$এর মান 4 বসাইয়া পাই

$\frac{30}{x+y}+\frac{20}{4}=10$, বা, $\frac{30}{x+y}=10-5=5$,

বা, $5(x+y)=30$, বা, $x+y=6 \cdots(4)$

এক্ষণে (3) ও (4) সমাধান করিয়া পাই $x=5$, $y=1$.

অতএব, ঘণ্টায় নৌকার বেগ 5 কি. মি. এবং স্রোতের বেগ 1 কি. মি.।

প্রশ্নমালা 20

1. দুইটি সংখ্যার যোগফল 61 এবং অন্তর 13, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

2. তোমার ও তোমার ভগ্নীর কাছে মোট 120 টাকা আছে। তুমি যদি 10 টাকা তোমার ভগ্নীকে দাও, তবে উভয়ের টাকা সমান হয়। কাহার কত টাকা আছে?

3. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি উহাদের অন্তরের 7 গুণ। সমষ্টি 56 হইলে সংখ্যা দুইটি কত?

4. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 125 ; ছোটটির সহিত 10 যোগ করিলে যত হয়, বড়টি হইতে 5 বিয়োগ করিলে তত হয়। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর

5. দুইটি সংখ্যার গুণফল 216 এবং ভাগফল $\frac{3}{2}$; সংখ্যা দুইটি কত ?

6. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 75 এবং উহাদের অন্তরফলের 4 গুণ বড় সংখ্যাটি অপেক্ষা 15 বেশী। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

7. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 56, বড়টির $\frac{1}{4}$ ও ছোটটির $\frac{1}{6}$ অংশের সমষ্টি 12 সংখ্যা দুইটি কত ?

8. দুইটি সংখ্যার যোগফল 128 ; বড়টির $\frac{1}{9}$ অংশ ছোটটির $\frac{1}{7}$ অংশের সমান। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

9. 4 খানি চেয়ার ও 5 খানি টেবিলের একত্রে মূল্য 345 টাকা এবং 3 খানি চেয়ার ও 2 খানি টেবিলের একত্রে মূল্য 180 টাকা। প্রতিটি চেয়ার ও টেবিলের মূল্য কত ?

10. 3টি ঘোড়ার মূল্য 5টি গরুর মূল্যের সমান। 4টি ঘোড়া ও 3টি গরুর একত্রে মূল্য 2900 টাকা হইলে, প্রত্যেকটি ঘোড়া ও গরুর মূল্য কত ?

11. এক ব্যক্তি 5টি ঘোড়া বিক্রয় করিয়া 7টি গরু কিনিলে তাহার তহবিল 500 টাকা বাড়ে, কিন্তু ঐ দরে 3টি ঘোড়া বিক্রয় করিয়া 6টি গরু কিনিলে তাহার তহবিল 600 টাকা কমে। প্রত্যেকটি ঘোড়া ও গরুর মূল্য কত ?

12. একটি ভগ্নাংশের লবের সহিত 1 যোগ এবং হর হইতে 1 বিয়োগ করিলে উহা 1এর সমান হয়, কিন্তু লবের সহিত হর যোগ ও হর হইতে লব বিয়োগ করিলে ভগ্নাংশটি 6এর সমান হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

13. কোন ভগ্নাংশের লব অপেক্ষা হর 3 বেশী এবং লবের সহিত 7 যোগ করিলে ভগ্নাংশটি 1 বাড়িয়া যায়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর। [C. U. '33]

14. কোন্ ভগ্নাংশের হরে 1 যোগ করিলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$-এর সমান হয় এবং লব হইতে 2 বিয়োগ করিলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{3}$ হয় ? [D. B. '22]

15. কোন ভগ্নাংশের লবে 2 যোগ ও হর হইতে 1 বিয়োগ করিলে উহার মান 1 হয় এবং লব হইতে 3 বিয়োগ ও হরে 2 যোগ করিলে উহার মান $\frac{1}{3}$ হয়। ভগ্নাংশটি কত ?

16. কোন ভগ্নাংশের লব অপেক্ষা হরটি 3 অধিক ; কিন্তু লবে 1 যোগ ও হর হইতে 1 বিয়োগ করিলে উহা $\frac{5}{6}$এর সমান হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

17. কোন ভগ্নাংশের লবকে দ্বিগুণ ও হরে 1 যোগ করিলে উহার মান $\frac{1}{2}$ হয়, কিন্তু উহার হরটিকে দ্বিগুণ ও লবে 1 যোগ করিলে উহার মান $\frac{1}{6}$ হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর। [E. B. S. B. '35]

18. একটি ভগ্নাংশের লব 1 এবং অন্য একটির হর 15 ; উভয় ভগ্নাংশের সমষ্টি $\frac{3}{10}$; প্রথমটির দ্বিগুণ দ্বিতীয়টি অপেক্ষা $\frac{1}{5}$ বেশী। ভগ্নাংশ দুইটি নির্ণয় কর। [Oxford]

19. দুই অঙ্কের কোন সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 7 এবং সংখ্যাটির সহিত 9 যোগ করিলে ঐ অঙ্কদ্বয়ের পরস্পর স্থান বিনিময় হয়। ঐ সংখ্যাটি কত ?

20. 100 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোন সংখ্যার অঙ্কগুলির সমষ্টি 6 এবং ঐ অঙ্কগুলি উল্টাইয়া লিখিলে যে সংখ্যা হয় তাহা পূর্ব সংখ্যা অপেক্ষা 18 কম হয়, সংখ্যাটি কত ? [C. U. '25]

21. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্কগুলির সমষ্টি 8 ; উহার বাম দিকের অঙ্কটি 2 বৃদ্ধি পাইলে উহা (অঙ্কটি) সংখ্যাটির $\frac{1}{7}$ হইবে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

22. কোন সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের মধ্যে একটি অপরটি অপেক্ষা 5 বেশী। অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করিলে নূতন সংখ্যাটি প্রদত্ত সংখ্যার $\frac{3}{8}$ হয়। সংখ্যাটি কত ? [D. B. '28]

23. দুই অঙ্কের কোন সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের অন্তর 2 এবং সংখ্যাটি হইতে অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির দেড়গুণ বিয়োগ করিলে উহার অঙ্কদ্বয় উল্টাইয়া যায়। সংখ্যাটি কত ? [C. U. 1899]

24. দুই অঙ্কের কোন সংখ্যার দশকের অঙ্ক এককের অঙ্কের 3 গুণ। সংখ্যাটি হইতে 54 বিয়োগ করিলে উহার অঙ্কদ্বয় উল্টাইয়া যায়। সংখ্যাটি কত ? [C. U. '43]

25. 10 ও 100-র মধ্যবর্তী কোন সংখ্যা উহার অঙ্কগুলির সমষ্টির 8 গুণ। উহা হইতে 45 বিয়োগ করিলে অঙ্কদ্বয় উল্টাইয়া যায়। সংখ্যাটি কত ? [C. U. '19]

26. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি সংখ্যাটি অপেক্ষা 54 কম। অঙ্ক দুইটি উল্টাইয়া লিখিলে যে সংখ্যা হয় তাহা পূর্বসংখ্যা অপেক্ষা 27 বেশী। প্রদত্ত সংখ্যাটি কত ? [P. U. '35]

27. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যা ও ঐ অঙ্কদ্বয় উল্টাইয়া দিলে যে সংখ্যা হয় তাহাদের সমষ্টি 66 এবং অঙ্কদ্বয়ের অন্তর 2 ; সংখ্যাটি কত ?

28. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যা এবং ঐ অঙ্কদ্বয় উল্টাইয়া লিখিলে যে সংখ্যা হয় তাহাদের অন্তর 9 ; যদি অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 11 হয়, তবে সংখ্যাটি কত ?

29. 4 বৎসর পূর্বে A-র বয়স B-র বয়সের 4 গুণ ছিল এবং 6 বৎসর পরে A-র বয়স B-র বয়সের 3 গুণ হইবে। বর্তমানে তাহাদের বয়স কত ?

30. 10 বৎসর পরে এক ব্যক্তির বয়স তাহার পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইবে ; কিন্তু 8 বৎসর পূর্বে তাহার বয়স পুত্রের বয়সের 8 গুণ ছিল। তাহাদের বর্তমান বয়স কত ? [P.U. '27]

31. A ও B-র বয়সের সমষ্টি 60 বৎসর এবং B অপেক্ষা A 12 বৎসরের বড়। কাহার বয়স কত ?

32. পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি 60 বৎসর। দুই বৎসর পূর্বে পিতার বয়সের দ্বিগুণ পুত্রের বয়সের 5 গুণ ছিল। এখন কাহার বয়স কত ?

33. এক ব্যক্তির বয়স তাহার 3 পুত্রের বয়সের সমষ্টির 4 গুণ এবং 8 বৎসর পরে তাহার বয়স পুত্রদের বয়সের সমষ্টির দ্বিগুণ হইবে। লোকটির বয়স কত ? [P.U. '30]

34. A-র বয়স B ও C-এর বয়সের সমষ্টির 3 গুণ এবং 5 বৎসর পূর্বে A-র বয়স B ও C-এর বয়সের সমষ্টির 8 গুণ ছিল। এখন A-র বয়স কত ?

35. 8 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 3 গুণ হইবে এবং 4 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 9 গুণ ছিল। তাহাদের বর্তমান বয়স নির্ণয় কর। [S. F. '68]

36. এক ব্যক্তি স্থির জলে ঘণ্টায় 5 কি. মি. নৌকা বাহিয়া যায়। স্রোতের অনুকূলে 40 কি.মি. যাইতে তাহার যে সময় লাগে স্রোতের প্রতিকূলে 40 কি. মি. যাইতে তাহার 3 গুণ সময় লাগে। স্রোতের গতিবেগ নির্ণয় কর।

37. এক ব্যক্তি স্রোতের অনুকূলে 6 ঘণ্টায় 30 কি. মিটার নৌকা বাহিয়া গিয়া 10 ঘণ্টায় ফিরিয়া আসিল। নৌকার ও স্রোতের গতিবেগ নির্ণয় কর।

38. এক ব্যক্তি নৌকা বাহিয়া 5 ঘণ্টায় 35 কি. মি. গিয়া 7 ঘণ্টায় ফিরিয়া আসিল। নৌকা ও স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

39. একটি নৌকা অনুকূল স্রোতে 40 কি. মিটার ও প্রতিকূল স্রোতে 32 কি. মি. 13 ঘণ্টায় যায় এবং স্রোতের অনুকূলে 24 কি. মি. ও প্রতিকূলে 28 কি. মি. 10 ঘণ্টায় যায়। নৌকার ও স্রোতের গতিবেগ নির্ণয় কর।

40. 44কে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর যেন দ্বিতীয়টির সহিত 4 যোগ করিলে প্রথম অংশের দ্বিগুণ হয়।

41. কোন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 3 মিটার বেশী ও প্রস্থ 3 মিটার কম হইলে ক্ষেত্রফল 18 বর্গমিটার কম হয়। আবার দৈর্ঘ্য 3 মিটার বেশী ও প্রস্থ 3 মিটার বেশী হইলে ক্ষেত্রফল 60 বর্গমিটার বেশী হয়। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

42. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 2 মিটার কম ও প্রস্থ 3 মি. বেশী হইলে উহার ক্ষেত্রফল 24 বর্গমিটার বাড়ে ; কিন্তু দৈর্ঘ্য 2 মি. ও প্রস্থ 2 মি. কম হইলে ক্ষেত্রফল 16 বর্গমিটার কমিয়া যায়। দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

অষ্টম অধ্যায়

লেখ (Graph)

§ **39.** তোমরা পূর্বেই লেখ অঙ্কন প্রণালী শিখিয়াছ এবং জান যে কোন লেখ অঙ্কনের সময় ছক কাগজ বা বর্গাকৃতি কাগজ ব্যবহার করা হয়। সাধারণতঃ ছক কাগজে ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহু $\frac{1}{10}$ ইঞ্চি বা ·1 ইঞ্চি হইয়া থাকে। মিলিমিটার, সেন্টিমিটার মাপেও ছক কাগজ প্রস্তুত হইতে পারে। ছক কাগজ যেরূপই হউক না কেন, উহার ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রগুলির এক বা একাধিক বাহুর সমান দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া দূরত্ব মাপা হয়।

ছক কাগজে XOX′ ও YOY′ দুইটি সরলরেখা O-বিন্দুতে পরস্পর সমকোণে ছেদ করিলে প্রথমটিকে x-অক্ষ (x-axis) ও দ্বিতীয়টিকে y-অক্ষ (y-axis) ধরা হয়। O বিন্দুটি হইল মূলবিন্দু (origin)। সাধারণতঃ XOX′ রেখাটি অনুভূমিক এবং YOY′ রেখাটি উল্লম্ব রেখা ধরা হয়। এই ছক কাগজের ব্যবহারে লেখ অঙ্কন প্রণালী তোমরা পূর্ব শ্রেণীতে শিখিয়াছ। এখানে কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইল।

উদাহরণ 1. এক কিলোগ্রাম চিনির মূল্য 2 টা. 50 প. হইলে লেখ সাহায্যে (i) 3 কি. গ্রাম চিনির মূল্য এবং (ii) 12 টাকা 50 পয়সায় কত চিনি পাওয়া যাইবে তাহা নির্ণয় কর।

মনে কর x কি. গ্রা. চিনির মূল্য y টাকা। এখানে বলা আছে 1 কি. গ্রাম চিনির মূল্য $\frac{5}{2}$ টাকা।

$\therefore$ x কি. গ্রা. চিনির মূল্য $\frac{5x}{2}$ টাকা।

$\therefore$ $y=\frac{5x}{2}$ হইল এবং ইহাই এখানে উদ্দিষ্ট লেখটির সমীকরণ।

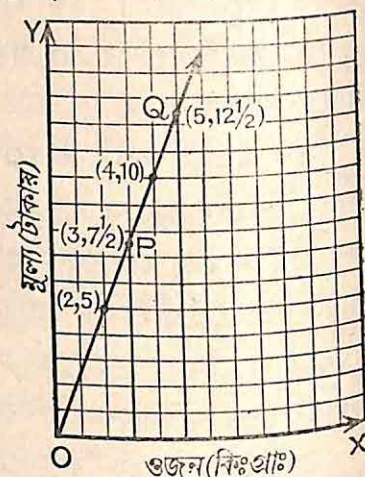
এই সমীকরণ হইতে পাই

x	0	2	4	...
y	0	5	10	...

এক্ষণে মনে কর ছক কাগজে x-অক্ষের উপর অবস্থিত ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু 1 কি. গ্রা. ওজন এবং y-অক্ষস্থিত অনুরূপ একটি বাহু 1 টাকা মূল্য সূচিত করে। এইরূপ দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া ছক কাগজে (0, 0), (2, 5), (4, 10) বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। এই বিন্দুগুলি যোগ করিলে দেখা যায় ইহারা সমরেখ। এই বিন্দুগুলি দিয়া অঙ্কিত OQ সরলরেখা $y=\frac{5x}{2}$ এর লেখ হইল। চিত্র 1 দেখ।

(i) এই লেখটির যে কোন বিন্দুর ভুজ ও কোটি দ্বারা যথাক্রমে চিনির ওজন (কি. গ্রামে) এবং তাহার মূল্য (টাকায়) সূচিত হইবে। ঐ লেখ হইতে দেখ উহার যে বিন্দুর (P-এর) ভুজ 3 একক, তাহার কোটি $=7\frac{1}{2}$ একক ; সুতরাং 3 কি. গ্রাম চিনির মূল্য $7\frac{1}{2}$ টাকা হইল।

চিত্র 1

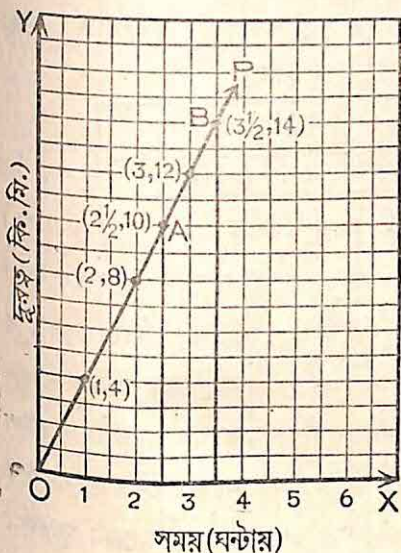
(ii) আবার, দেখা যায় লেখটির যে বিন্দুর (Q-এর) কোটি $12\frac{1}{2}$ একক তাহার ভুজ $=5$ একক ; সুতরাং 12 টা. 50 পয়সায় 5 কি. গ্রা. চিনি পাওয়া যাইবে।

[দ্রষ্টব্য : এখানে ওজন বা মূল্য ঋণাত্মক হইতে পারে না বলিয়া লেখটি প্রথম পাদে অবস্থিত থাকিবে। সেজন্য চিত্রে কেবল প্রথম পাদ অঙ্কন করা হইয়াছে।]

উদা. 2. এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 4 কি. মিটার যায়। তাহার গতিলেখ অঙ্কিত কর এবং তাহা হইতে সে (i) 2 ঘ. 30 মিনিটে কত দূর যাইবে এবং (ii) 14 কি. মি. যাইতে তাহার কত সময় লাগিবে নির্ণয় কর।

মনে কর লোকটি x ঘণ্টায় y কি.মি. যায়। এখানে বলা আছে লোকটি 1 ঘণ্টায় 4 কি.মি. যায়, সুতরাং x ঘণ্টায় যায় $4x$ কি.মি.। $\therefore y=4x$ হইল গতিপথের সমীকরণ।

চিত্র 2

এখানে ছক কাগজে কেবল প্রথম পাদ প্রয়োজন। OX ও OY অক্ষদ্বয়।

মনে কর, ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2টি বাহু দ্বারা এক ঘণ্টা এবং অনুরূপ 1টি বাহু দ্বারা এক কি. মিটার সূচিত করে।

$y=4x$ সমীকরণ হইতে পাই,

x	1	2	3	...
y	4	8	12	...

অতএব, (1,4), (2,8) (3,12) বিন্দুগুলি লেখটির উপর থাকিবে। এই বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করিয়া দেখা যায় উহারা সমরেখ। ঐ বিন্দুগুলি দিয়া OP সরলরেখা আঁকা হইল; OP সরলরেখা $y=4x$-এর লেখ, সুতরাং উহা ঐ ব্যক্তির গতিলেখ হইল [চিত্র 2]

(i) 2 ঘ. 30 মিনিট $=2\frac{1}{2}$ ঘ. (=5 বাহু)। লেখ হইতে দেখা যায় উহার যে বিন্দুর (A-র) ভুজ = 5 বাহু $=\frac{5}{2}$ একক, তাহার কোটি = 10 বাহু = 10 একক।

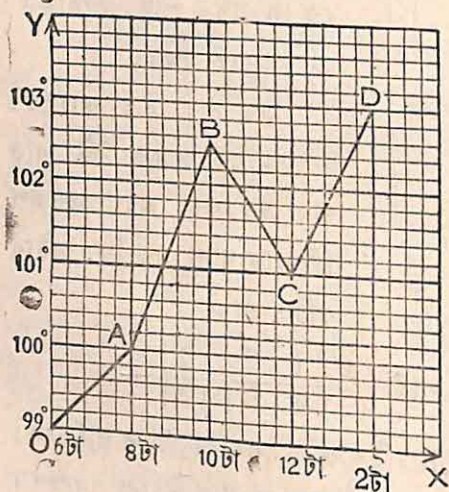
$\therefore$ লোকটি 2 ঘ. 30 মিনিটে 10 কি. মি. যায়।

(ii) আবার, দেখা যায় লেখস্থিত যে বিন্দুর (B-র) কোটি = 14 একক তাহার ভুজ = 7 বাহু $=3\frac{1}{2}$ একক।

$\therefore$ লোকটি $3\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় 14 কি. মি. যাইবে।

উদা. 3. তুমি একটি রোগীর সকাল হইতে বিভিন্ন সময়ে শরীরের তাপ পরিমাণ নিম্নলিখিতভাবে তালিকাবদ্ধ করিয়াছ। উহা প্রকাশ করিয়া একটি লেখ অঙ্কিত করিতে হইবে।

সময়	6টা	8টা	10টা	12টা	2টা
তাপ	99°	100°	102·5°	101°	103°

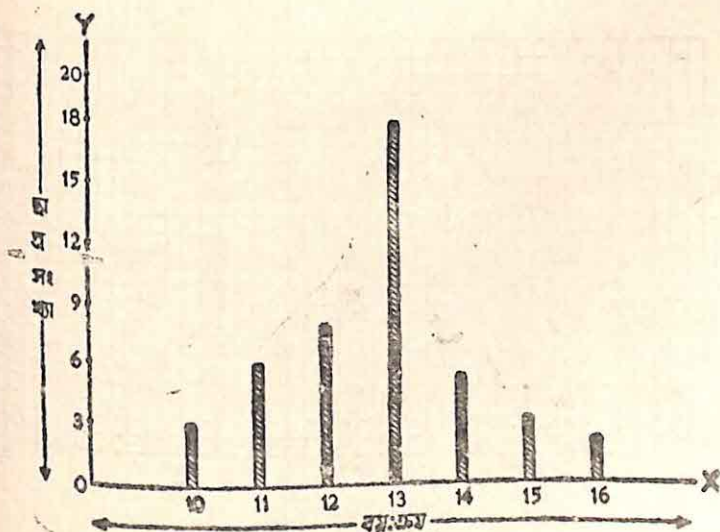
মনে কর, ছক কাগজে OX ও OY যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ। এখানে ন্যূনতম তাপ 99° বলিয়া তাহার অপেক্ষা কম তাপমাত্রা দেখান হইল না। x-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 5টি বাহু দ্বারা 2 ঘণ্টা এবং y-অক্ষ বরাবর অনুরূপ 5টি বাহু দ্বারা 1° সূচিত করা হইল।

চিত্র 3

মূলবিন্দু Oতে 99° ধরা হইল। এখন (6 টা, 99°), (8 টা, 100°), (10 টা, 102·5°) প্রভৃতি বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করা হইল। এই বিন্দুগুলি পর পর যোগ করা হইল। এখন দেখ OABCD হইল নির্ণেয় লেখ।

§ 40. দণ্ডলেখ (Bar Graph)**: স্তম্ভলেখ** (Column Graph)**:** এ পর্যন্ত আলোচিত লেখকে রৈখিক লেখ বা রেখাচিত্র বলে। অনেক সময় তুলনার সুবিধার জন্য প্রদত্ত উপাত্তগুলিকে দণ্ড বা স্তম্ভ অঙ্কিত করিয়া প্রকাশ করা হয়। এই দণ্ড বা স্তম্ভ লেখ অঙ্কন প্রণালী রৈখিক লেখ অঙ্কন প্রণালীর অনুরূপ। উদাহরণ দ্বারা এই লেখ অঙ্কন প্রণালী দেখান হইতেছে।

উদাহরণ 4. নিম্নের তালিকায় কোন বিদ্যালয়ের 450 জন ছাত্রের বয়ঃক্রম দেওয়া আছে। ইহাকে দণ্ডলেখ সাহায্যে প্রকাশ করিতে হইবে।

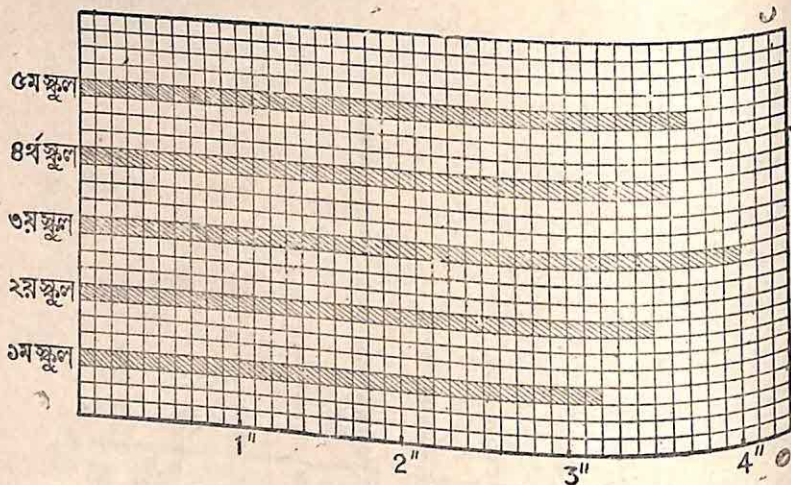
বয়স	10ব.	11ব.	12ব.	13ব.	14ব.	15ব.	16ব.
ছাত্রসংখ্যা	30	60	80	180	50	30	20

ছক কাগজে OX একটি অনুভূমিক এবং OY একটি উল্লম্ব রেখা লও। একক নির্ধারিত করিয়া OX অনুভূমিক রেখা বরাবর বয়সগুলি চিহ্নিত কর এবং OY উল্লম্ব রেখা বরাবর (ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু = 10 জন ছাত্র ধরিয়া) ছাত্রসংখ্যাগুলি চিহ্নিত কর। তাহার পরে বয়ঃক্রম সূচক প্রত্যেক চিহ্নবিন্দু হইতে উহার ছাত্রসংখ্যা নির্দেশক অঙ্কের দৈর্ঘ্যের সমান উল্লম্ব রেখা অঙ্কিত

চিত্র 4

কর। এইরূপে অঙ্কিত উল্লম্ব রেখাগুলি দ্বারা উপরের তালিকাটি প্রকাশিত হইল। উপরের চিত্র 4 দেখ।

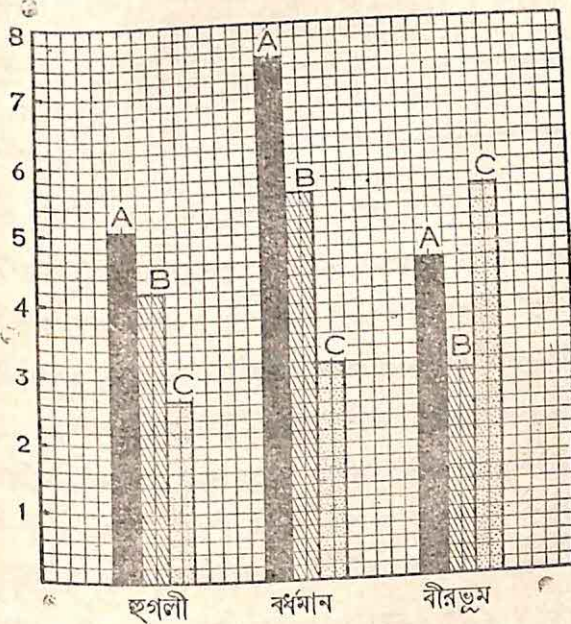
দ্রষ্টব্য : যদি অনুভূমিক রেখা বরাবর ছাত্রসংখ্যা এবং উল্লম্ব রেখা বরাবর বয়স নির্দেশ করা হয়, তবে কতিপয় অনুভূমিক রেখা দ্বারা উপরের তথ্য প্রকাশিত হইবে।

উদা. 5. স্কুল ফাইন্যাল পরীক্ষায় পাঁচটি বিদ্যালয়ের এক বৎসর যথাক্রমে 32, 35, 40, 36 ও 37 জন ছাত্র উত্তীর্ণ হয়। ইহা প্রকাশ করিয়া একটি অনুভূমিক দণ্ডলেখ অঙ্কিত কর।

মনে কর, ·1 বা $\frac{1}{10}$ ইঞ্চি দৈর্ঘ্য দ্বারা এক সংখ্যা সূচিত করা হইল। অতএব, 32 সংখ্যা সূচিত হইবে $(32 \times \frac{1}{10})$ বা 3·2 ইঞ্চি দ্বারা। অনুরূপে 35, 40, 36 ও 37 সংখ্যাগুলি যথাক্রমে 3·5, 4, 3·6 ও 3·7 ইঞ্চি দৈর্ঘ্য দ্বারা সূচিত হইবে। এখন 3·2, 3·5, 4, 3·6, 3·7 ইঞ্চি দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট পাঁচটি অনুভূমিক দণ্ডরেখা অঙ্কিত করা হইল। ইহাই উত্তীর্ণ ছাত্রসংখ্যার দণ্ডলেখ। [চিত্র 5]

চিত্র 5

উদা. 6. তিনটি জেলায় স্বাস্থ্যোন্নতির জন্য যে পরিমাণ অর্থ এক বৎসরে পাওয়া গিয়াছে তাহার বিবরণ পরপৃষ্ঠায় প্রদত্ত হইল। ঐগুলি হইতে একটি দণ্ডলেখ অঙ্কিত কর।

জেলা	সরকার-প্রদত্ত (A)	জেলাবোর্ড প্রদত্ত (B)	গচ্ছিত দান (Endowment) (C)
হুগলী···	56000	42000	26400
বর্ধমান···	75500	56000	32000
বীরভূম···	46000	30500	56400

নিম্নে যে ছক কাগজ লওয়া হইয়াছে তাহার ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুদ্বারা 2000 টাকা সূচিত করা হইল। অঙ্কিত দণ্ডলেখতে A, B, C দ্বারা যথাক্রমে সরকার-প্রদত্ত, জেলাবোর্ড প্রদত্ত এবং দানের অর্থ নির্দেশ করা হইল। [চিত্র 6]

চিত্র 6

§ **41. আয়ত লেখ (Histogram) :** তোমরা যে স্তম্ভলেখ অঙ্কন শিখিয়াছ এই আয়তলেখ তাহারই অনুরূপ। প্রভেদ এই যে আয়ত লেখগুলির ক্ষেত্রে অঙ্কিত আয়তগুলি পরস্পর সংলগ্ন

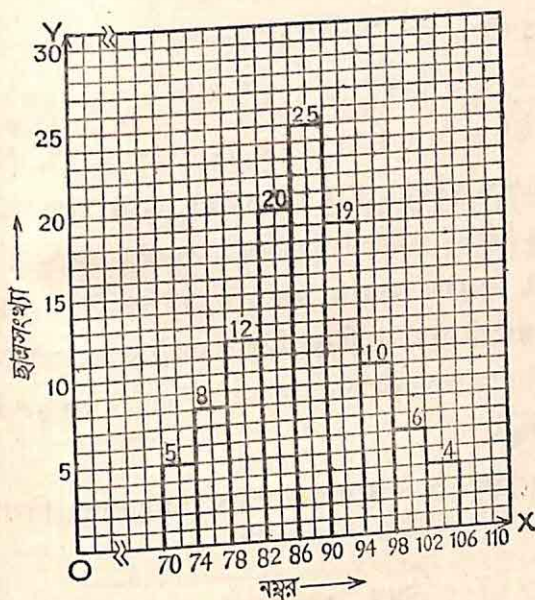
থাকে, কিন্তু দণ্ড বা স্তম্ভলেখগুলির ক্ষেত্রে দণ্ডগুলির প্রস্থ যথেচ্ছ হইতে পারে বলিয়া উহারা সংলগ্ন না হইতে পারে। আয়তলেখ অঙ্কনের জন্য দুইটি পরস্পরছেদী ও লম্বভাবে অবস্থিত সরলরেখা লইতে হয়। উহাদের একটি অনুভূমিক এবং উহাকে ভূমি (base) ধরা হয়। অপর সরলরেখাটি উল্লম্ব, ইহা পূর্ব রেখাটির উপর লম্ব। আয়তলেখগুলির উপাত্তগুলি (data) ধনাত্মক বলিয়া লেখ কাগজের কেবল প্রথমপাদ আঁকা হয়।

উদা. 7. নিম্নে কতিপয় ছাত্রের কোন পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের বিভাগ দেওয়া হইল। উহার হিস্টোগ্রাম অঙ্কন কর :

নম্বর	70 হইতে 74 এর নীচে	74 হইতে 78 এর নীচে	78-82 নীচে	82-86 নীচে	86-90 নীচে	90-94 নীচে	94-98 নীচে	98-102 নীচে	102-106 নীচে
ছাত্রসংখ্যা	5	8	12	20	25	19	10	6	4

প্রণালী : লেখ কাগজে পরস্পরছেদী একটি অনুভূমিক রেখা OX ও একটি উল্লম্ব রেখা OY লওয়া হইল (চিত্র 7 দেখ)। এখানে নম্বর ও ছাত্রসংখ্যা এই দুইটির কোন ঋণাত্মক মান না থাকায় আয়তলেখটি প্রথম পাদে থাকিবে। এক্ষণে নম্বরের মানের জন্য সুবিধামত দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া অনুভূমিকরেখা বরাবর 70—74, 74—78, 78—82, 82—86,···প্রভৃতি নম্বরের বিভাগগুলি বসাইতে হইবে। এখানে নম্বরের দুইটি মানের জন্য ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু ধরিয়া বিভাগগুলি বসান হইল।

আবার উল্লম্ব রেখা বরাবর সুবিধামত যে কোন দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া ছাত্রসংখ্যা 0, 5, 10, 15,···প্রভৃতি লেখা হইল। এখানে ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু দ্বারা একজন ছাত্র সূচিত করা হইল।

প্রদত্ত নম্বরের প্রথম বিভাগ "70 হইতে 74-এর নীচে" এবং উহার ছাত্রসংখ্যা 5 বলিয়া 70 ও 74-এর দাগ হইতে 5 একক দীর্ঘ

চিত্র 7

দুইটি লম্ব টানিয়া আয়তক্ষেত্রটি সম্পূর্ণ করা হইল ; অর্থাৎ এখানে 70—74 বিভাগের ছাত্রসংখ্যা 5 এইটি ছকে প্রকাশ করার জন্য এরূপ একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত করা হইল যাহার ভূমি 70—74 বিভাগটির দৈর্ঘ্য এবং উচ্চতা 5 একক দীর্ঘ। পরবর্তী বিভাগ "74 হইতে 78-এর নীচে" ও উহার ছাত্রসংখ্যা 8, সুতরাং উহা লেখটিতে প্রকাশ করার জন্য এমন একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত করা হইল যাহার ভূমি 74—78 বিভাগটির দৈর্ঘ্য এবং উচ্চতা 8 একক দীর্ঘ। এইরূপে 9টি বিভাগের জন্য নয়টি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত করা হইল। এই নয়টি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল আয়তলেখ হইল।

[দ্রষ্টব্য : (1) অনুভূমিক ও উল্লম্বরেখা বরাবর সুবিধামত দৈর্ঘ্য একক ধরিবে। উভয়রেখা বরাবর একই দৈর্ঘ্য একক ধরা যায় অথবা বিভিন্ন দৈর্ঘ্য এককও ধরা যায়।

(2) লেখটিতে দেখ 70—74 বিভাগটি যেখানে বসান হইয়াছে, মূলবিন্দু O হইতে ঐ বিভাগের দূরত্ব নির্বাচিত দৈর্ঘ্য একক অনুসারে যাহা দেখান উচিত ছিল তাহা দেখান হয় নাই—কারণ, তাহা হইলে চিত্রটি অনেক বড় হইয়া যাইবে। অতএব, এরূপস্থলে আমরা উল্লম্ব রেখা OY-কে 70—74 বিভাগের নিকট সরাইয়া আনিয়াছি বুঝিতে হইবে। ইহা প্রকাশ করার জন্য O হইতে 70—74 বিভাগের মধ্যে OX রেখার উপরে ∫∫ চিহ্ন দিয়া একটু অংশ কাটিয়া দেওয়া হইয়াছে। উহার সমান্তরাল উপরের সীমারেখাতেও ঐরূপ চিহ্ন দেওয়া হইয়াছে।

(3) মূল বিন্দু O হইতেও অনেক সময় প্রথম বিভাগ চিহ্নিত করা হয়।

(4) লেখ 7-এ নম্বর বিভাগগুলি সমান বলিয়া আয়তগুলির ভূমিসমূহ সমান হইয়াছে এবং তজ্জন্য হিস্টোগ্রামটি সমঞ্জস (symmetrical) হইয়াছে। বিভাগগুলি সমান না হইলে হিস্টোগ্রামটি সমঞ্জস হইত না।

(5) ছাত্রসংখ্যা অনুভূমিক রেখা বরাবর এবং প্রাপ্ত নম্বর উল্লম্ব রেখা বরাবর ধরা যাইত। সুবিধামত উহা স্থির করিয়া লইবে।]

প্রশ্নমালা 21

1. এক কিলোগ্রাম গমের মূল্য 1 টা. 50 পয়সা হইলে লেখ সাহায্যে (i) 5 কি. গ্রাম গমের মূল্য এবং (ii) 12 টাকায় কত গম পাওয়া যাইবে তাহা নির্ণয় কর।

2. এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 3 কি. মিটার যায়। তাহার গতিচিত্র অঙ্কিত কর এবং তাহা হইতে (i) সে 2 ঘ. 20 মিনিটে কতদূর যাইবে ও (ii) 14 কি. মিটার যাইতে তাহার কত সময় লাগিবে তাহা নির্ণয় কর।

3. দুইটি আমের মূল্য 30 পয়সা হইলে লেখ সাহায্যে 5টি আমের মূল্য এবং 90 পয়সায় কয়টি আম পাওয়া যাইবে তাহা নির্ণয় কর।

4. A প্রাতে 8টায় রওনা হইয়া ঘণ্টায় 4 কি. মিটার বেগে চলিতে লাগিল এবং 2 ঘণ্টা পরে B তাহার দিকে ঘণ্টায় 6 কি. মিটার বেগে দৌড়াইতে লাগিল। B কখন ও কতদূরে Aকে ধরিবে তাহা লেখ সাহায্যে নির্ণয় কর।

5. এক ইঞ্চি 2·5 সে. মিটারের সমান ধরিয়া 6 ইঞ্চি কত সে. মিটারের সমান হইবে তাহা লেখ সাহায্যে নির্ণয় কর।

6. A কোন স্থান হইতে ঘণ্টায় 4 কি. মি. বেগে চলিতে লাগিল এবং 15 মিনিট পরে B সেস্থান হইতে ঘণ্টায় 8 কি. মি. বেগে যাইতে লাগিল। B কখন ও কোথায় Aকে ধরিবে তাহা লেখ সাহায্যে নির্ণয় কর। [A.U.'25]

7. একটি শহরের লোকসংখ্যা নিম্নের তালিকায় দেওয়া হইল। লেখ সাহায্যে ঐ শহরের 1920 সালের লোকসংখ্যা নির্ণয় কর। [B. U. '46]

সাল	1905	1915	1925	1935	1945
লোকসংখ্যা (সহস্রে)	15	20	25	30	35

8. একজন ক্রিকেট খেলোয়াড় প্রতি 20 মিনিটে 10 রান করে। ইহা প্রকাশ করিয়া একটি লেখ অঙ্কন কর এবং তাহা হইতে সে 80 মিনিটে কত রান করিবে এবং 55 রান করিতে কত সময় লইবে নির্ণয় কর।

9. তুমি একটি রোগীকে সেবা করিবার সময় তাহার বিভিন্ন সময়ের শরীরের তাপ নিম্নের তালিকায় লিখিয়াছ। উহা প্রকাশ করিয়া একটি লেখ অঙ্কিত কর।

সময়	5 টা	7টা	9টা	11টা	12 টা
তাপ	98°	99°	100°	101·5°	102°

10. একটি গ্রামে সোমবার হইতে শনিবার পর্যন্ত যে পরিমাণ বৃষ্টিপাত হইয়াছে তাহা নিম্নের তালিকায় দেওয়া হইল। ইহা প্রকাশ করিয়া একটি লেখ অঙ্কন কর।

সোম	মঙ্গল	বুধ	বৃহস্পতি	শুক্র	শনি
12 মি.মি.	1·5 সে.মি.	2 সে. মি.	3 সে. মি.	3·5 সে. মি.	15 মি. মি.

11. 1973 সালে 5টি স্কুলের পাশের সংখ্যা যথাক্রমে 52, 65, 70, 45, 74 ; ইহা প্রকাশ করিয়া একটি স্তম্ভলেখ অঙ্কিত কর।

12. বিভিন্ন প্রদেশে শিক্ষা বাবদে এক বৎসরে যে পরিমাণ অর্থ পাওয়া গিয়াছে ও ব্যয় হইয়াছে তাহা (টাকায়) নিম্নে প্রদত্ত হইল। ইহা প্রকাশ করিয়া দণ্ডলেখ অঙ্কিত কর।

State	সরকার প্রদত্ত	বেতন বাবদ	বোর্ড প্রদত্ত	কর্পোরেশন প্রদত্ত
পশ্চিমবঙ্গ	560000	480000	350000	150000
বিহার	640000	685000	460000	210000
উড়িষ্যা	482000	358000	286000	246000

13. একটি বিদ্যালয়ের প্রথম ছয়টি শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যা যথাক্রমে 70, 60, 50, 35, 45 ও 40 ; উল্লম্ব আয়তচিত্র দ্বারা বিবরণটি প্রকাশ কর।

14. একটি পাঠশালায় সোমবার হইতে শনিবার পর্যন্ত উপস্থিত ছাত্রসংখ্যা যথাক্রমে 79, 85, 63, 48, 72 ও 91 ; স্তম্ভলেখ দ্বারা এই তথ্যটি প্রকাশ কর।

15. কোন শ্রেণীর ছাত্রগণ একটি পরীক্ষায় শতকরা যত নম্বর পাইয়াছে তাহার তালিকা নিম্নে দেওয়া হইল। এই তালিকা হইতে হিস্টোগ্রাম অঙ্কিত কর।

প্রাপ্ত নম্বর	45%	50%	55%	60%	65%	70%	75%
ছাত্রসংখ্যা	8	10	12	20	15	9	6

16. কতকগুলি ছাত্রের বয়সের (আসন্ন বৎসরে) তালিকা নিম্নে দেওয়া হইল। উহা হইতে একটি আয়তলেখ অঙ্কন কর :—

ছাত্রসংখ্যা	2	3	4	5	7	6
বয়স	16	12	9	6	10	5

17. নিম্নে 54 জন লোকের মাসিক বেতনের তালিকা দেওয়া হইল। উহার হিস্টোগ্রাম অঙ্কিত কর।

85 টা. হইতে 89 টা.এর নীচে	89 টা.- 93 টা. নীচে	93 টা.- 97 টা. নীচে	97 টা.- 101 টা. নীচে	101 টা.- 105 টা. নীচে	105 টা.- 109 টা. নীচে	109 টা.- 113 টা. নীচে
4	7	10	15	8	6	4

18. নিম্নে 3 জন ছাত্রের কোন পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের বিভাগ দেওয়া হইল। ইহা একটি আয়তলেখ দ্বারা প্রকাশ কর।

নম্বর	55-60 এর মধ্যে	60-65 এর মধ্যে	65-70 এর মধ্যে	70-75 এর মধ্যে
ছাত্রসংখ্যা	4	6	65	5

19. নিম্নের তালিকায় আমাদের দেশে কয়েক বৎসরে যত হেক্টার জমিতে ধান চাষ হইয়াছে ও ধান উৎপন্ন হইয়াছে তাহা দেওয়া হইল। উহা একটি দণ্ডলেখ দ্বারা প্রকাশ কর :

বৎসর	ক্ষেত্র পরিমাণ 1000 হেক্টারে	উৎপন্ন ধান 10000 কুইন্টালে
1968-69	36960	39760
1969-70	38000	40000
1970-71	40500	44000
1971-72	42000	45500

20. নিম্নে একটি রাজ্যে বিভিন্ন বৎসরে জন্ম ও মৃত্যুসংখ্যার তালিকা দেওয়া হইল। উহা প্রকাশ করিয়া একটি দণ্ডলেখ অঙ্কিত কর :—

বৎসর	জন্ম সংখ্যা	মৃত্যুসংখ্যা
1969-70	1250	400
1970-71	2000	550
1971-72	2400	300
1972-73	2250	350

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 1

1. (i) 2 (ii) −2 (iii) −5 (iv) −5
2. (i) 18 (ii) −4 (iii) 4 (iv) −4
 (v) −12 (vi) 0 (vii) −40 (viii) 0
3. (i) −5 (ii) −7 (iii) +3 (iv) +22
4. (i) −10 (ii) −3 (iii) 0 (iv) 6
 (v) 6 (iv) 0 (vii) −3 (viii) 0
5. 84° 6. (i) 60 টা. (ii) 90 টা. 7. (−5) টা.
8. (−5) কি.মি., 5 কি. মি. 6. 26 কি.মি. পশ্চিমে 10. 10°.

প্রশ্নমালা 2

1. (1) −21 (2) −28 (3) 32 (4) 28 (5) 176
 (6) 0 (7) 0 (8) 0 (9) 0 (10) −3
 (11) −9 (12) 8 (13) 0 (14) 5.
2. (2) −4 (2) 4 (3) −10 (4) −5 (5) −26
 (6) 13 (7) 97 (8) −45 (9) 1 (10) 16
 (11) $\frac{4}{9}$ (12) 9 (13) $-\frac{4}{5}$ (14) 7.
3. $\frac{5}{13}$ 4. 0 5. 3 6. 0 7. 0.

প্রশ্নমালা 3

1. $a-3$ 2. $a-1$ 3. $a-6$ 4. $4-a+6c-3bc$
5. $5x-y-8z$ 6. $2a+7b+c$ 7. $6x-7y$
8. $-2a-2b-2c$ 9. $x-2y-4z$ 10. $3x+1$
11. 17 12. $2x+5$ 13. 3 14. $6a-2b+2c$
15. $a-2b+3c$ 16. $7x-11$.

প্রশ্নমালা 4

1. x^2+4y^2 2. 0 3. $9a^3+4a^2+2a+1$
4. $\frac{25}{12}x^2+2y^2+x$ 5. $4a^2-4ab+6b^2$. 6. 50
7. $3a^3+5a^2-8a+3$ 8. $-a^2+2ab-b^2+2c^2$

9. $4x^4+3x^3+5x^2-x+5$ 10. $-\frac{1}{3}a^4+\frac{1}{4}a^3+a^2+\frac{2}{3}a+4$
11. $-2x^2+3xy-y^2$ 12. $3xy+2x^2+4yz+y^2$
13. $10a^3+3a^2-3a-1$ 14. a^3-b^3 15. $8x^3-27y^3$
16. $6a^5-a^4-2a^3-13a^2-3a$ 17. $\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2y+\frac{17}{8}xy^2-\frac{1}{2}y^3$
18. x^4-y^4 19. $1-a^8$ 20. $6a^2$ 21. $1+a^4+a^8$
22. $4x-3y+5z$ 23. $-3a^2b-2ab^2-7c^2$
24. $-2a^3b+a^2b^2-3ab+1$ 25. $3x+2y-4z$
26. $3a^2-4b^2-5c^2$.

প্রশ্নমালা 5

1. $4x^2+9y^2+12xy$ 2. $a^2+b^2+4c^2-2ab-4bc+4ac$
3. $4x^2+y^2+9z^2-4xy+12xz-6yz$ 4. $\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{9}b^2-\frac{1}{3}ab$
5. $1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{x}-\frac{2}{y}-\frac{2}{xy}$ 6. y^2 7. $16a^2$
8. 9 9. $36xy$ 10. $30ab$ 11. 18 12. ± 2
13. ± 6 14. 39 15. 45 16. $x=5,\ y=3$
17. 7 18. 18 19. 25 20. 24
21. 69 22. c^2-2.

প্রশ্নমালা 6

1. $(9x+8b)(9x-8b)$ 2. $3(3a+b)(3a-b)$
3. $(x^2+2x+2)(x^2-2x-2)$ 4. $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$
5. $(2a^2+2a+1)(2a^2-2a+1)$ 6. $(2a+b+c)(2a-b-c)$
7. $(3a+3b+2c)(3a+3b-2c)$ 8. $(a+b-c)(a-b+c)$
9. $(2x+z)(2x-2y-z)$ 10. $(a+b+1)(a-b+1)$
11. $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)$
12. $(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)$ 13. $(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$
14. $(2a^2+6ab+9b^2)(2a^2-6ab+9b^2)$
15. $(a+b-2c)(a-b+2c)$ 16. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
17. $5(2a+3b)(2a-3b)$ 18. $(x+2y+2)(x-2y+2)$
19. $(a+b-3c)(a-b+3c)$
20. $(a^2+a+1)(a^2-a+1)(a^4-a^2+1)$
21. $(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$
22. $(a^2+5ab+b^2)(a^2-5ab+b^2)$
23. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$ 24. $(a+1)(a-1)(b+1)(b-1)$
25. $(a+b-c+d)(a-b+c+d)$.

প্রশ্নমালা 7

1. 18, 24 2. 30, 45 3. 111, 112, 113 4. 11, 12, 13
5. 15, 16 6. 520 7. 84, 72 8. 64, 128
9. পিতার 45 ব., পুত্রের 15 ব. 10. পিতার 50 ব., পুত্রের 25 ব.
11. 12 ব. 12. 20 টা. 13. A 65 টা., B 39 টা.,
14. A 120 টা, B 60 টা. 15. 120 16. $\frac{4}{7}$
17. $\frac{6}{7}$ 18. দৈর্ঘ্য 18 মি., প্রস্থ 16 মি.
19. গরু 300 টা., ঘোড়া 500 টা. 20. 5 কি. মিটার।

প্রশ্নমালা 8

1. 0, −1 2. −1, 0 1 3. −1, 0, 1 4. 2, 3
5. −1, 0, 1 6. $x<-\frac{3}{4}$ 7. $x>3$ 8. $x\leq-\frac{3}{2}$
9. $x>\frac{8}{3}$ 10. (0, 1, 2, 3) 11. $4x>2x+14,\ x>7$
12. $x>10-4x,\ x>2$ 13. $4x-1<x+5,\ x<2$ 14. 14, 12
15. 13 ব. 16. 20 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধনাত্মক সংখ্যা 17. 31 টাকা
18. 54, 63, 72, 81.

প্রশ্নমালা 9

1. $5a^4-19a^3+42a^2-23a+21$
2. $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$
3. $4x^6-2x^5-8x^4+3x^3+13x^2-5x-5$ 4. $x^8+x^4y^4+y^8$
5. $6a^5-7a^4+5a^3+2a^2-2a+2$
6. $1+2a-3a^2+4a^4-3a^5+a^6$
7. $a^4+6a^2b^2+4a^3b+4ab^3+b^4-c^4$ 8. $a^3+b^3+c^3-3abc$
9. $x^3+y^3-z^3+3xyz$ 10. a^5-b^5
11. $acx^3+a^2x^2+bcx^2+abx+c^2x+ac$
12. $x^3+2ax^2-bx^2+b^2x+a^2x-abx+ab^2$
13. $a^2x^5-b^2x^3-2bcx^2-c^2x$ 14. a^6+7a^3-8
15. $x^3+y^3-1+3xy$ 16. a^2+ab+b^2 17. x^3-y^3
18. $a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}+3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}$
19. $a^4-4a^3b^{-\frac{1}{3}}+6a^2b^{-\frac{2}{3}}-4ab^{-1}+b^{-\frac{4}{3}}$
20. $x^4-4x^3y^{-1}+6x^2y^{-2}-4xy^{-3}+y^{-4}$
21. $a^3+12a^2+47a+60$ 22. $6x^3-23x^2+29x-12$
23. $a^8+a^4b^4+b^8$ 24. $a^2bx^3-b^3x-a^3x^2+ab^2$

25. $x^8+2x^6+3x^4+2x^2+1$
26. $ab^3-b^3c+a^3c-a^3b+bc^3-ac^3$
27. $2x^2y^2+2y^2z^2+2x^2z^2-x^4-y^4-z^4$ 28. x^6-1
29. $a^3b^3+b^3c^3+3ab^3c^2+3a^2b^3c-a^2bc^3-a^3bc^3$
30. $x^{-8}-y^{-8}$ 31. $6x^4-7x^3+10x^2+8x-5$
32. $-4x^5+8x^4-9x^3+17x^2-7x+10$
33. $x^5y^5-x^4y^4-2x^3y^3+4x^2y^2-1$
34. $3x^7-4x^5+3x^4-5x^3+2x^2+2x-1$
35. $a^6-2a^5b-a^4b^2+2a^3b^3+a^2b^4-b^6$.

প্রশ্নমালা 10

1. (a) $5x+3$ (b) a^3+2a^2+4a+2
(c) $a+6$ 2. x^2-8x-9 3. $-2a^2+8a+1$
4. $2x^3-3x^2y+3xy^2-4y^3$ 5. $1-x+y$
6. $a^2+b^2+x^2$ 7. $a^2+2ab+2b^2$ 8. $4x^2-2x+1$
9. $x^2+y^2-xy+x+y+1$ 10. a^4-a^2+a
11. $x^4-2x^3y+3x^2y^2-2xy^3+y^4$ 12. $a^4+a^3b-ab^3-b^4$
13. (i) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
13. (ii) $a^2+9b^2+c^2+3ab-ac+3bc$ 14. $a^2+b^2+c^2+d^2$
15. $x^2+y^2-2xy-z^2$ 16. $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}$
17. $a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{3}{4}}$ 18. $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}$
19. $a^2b+ac^2+b^2c-a^2c-ab^2-bc^2$ 20. $b+c$ 21. $a+b+c$
22. $x+a$ 23. $5a+1+\frac{5}{2a+3}$ 24. $5x-7+\frac{x+20}{x^2+2x+3}$
25. $2x+3+\frac{2x-2}{x^2+3x+1}$ 26. $x+6$ 27. a^2+6a-4
28. $a^3-2a^2+14a-28$
29. ভাগফল$=2a^2-3a+4$, ভাগশেষ$=a^3-4a-1$
30. ভাগফল$=x^2-2x+3$, ভাগশেষ$=x^2-x+2$
31. -118 32. x^4-4x^2+5x 33. a^2+2
34. ভাগফল$=1+4x+8x^2$, ভাগশেষ$=16x^3$
35. ভাগফল$=1-2x+3x^2$, ভাগশেষ$=-4x^3-3x^4$ 36. 7.

প্রশ্নমালা 11

1. $8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$ 2. $8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$
3. $x^3y^3+3x^2y^2+3xy+1$ 4. $x^3y^3-3x^2y^2+3xy-1$
5. $x^3y^3+3x^3y^2+3x^3y+x^3$ 6. $x^3y^3-3x^2y^3+3xy^3-y^3$
7. $a^3b^3c^3-6a^3b^2c^2+12a^3bc-8a^3$
8. $8a^3b^3c^3+12a^3b^2c^2+6a^3bc+a^3$ 9. $8x^3-12x+6x-1$
10. $8a^3+12a^2bc+6ab^2c^2+b^3c^3$
11. $x^3y^3+3x^2y^3z+3xy^3z^2+y^3z^3$
12. $27a^3b^3c^3-27a^2b^2c^2+9abc-1$ 13. 54 14. 0
15. 110 16. a^3-3a 17. 14 18. 4 19. 7904
23. $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$ 24. $8y^3+24y^2z+24yz^2+8z^3$
25. $64x^3$ 26. 9 27. 0 28. -27 29. -118
30. -28 31. 1 32. 8
33. 64000 34. ·027 35. 24389
36. $a^3+b^3-c^3+3a^2b+3ab^2-3a^2c-6abc+3ac^2-3b^2c+3bc^2$
37. $a^3-b^3-c^3+3ab^2+3ac^2-3a^2b-3a^2c+6abc-3bc^2-3b^2c$
38. $27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3-27x^2z-36xyz-12y^2z$
$+9xz^2+6yz^2-z^3$.

প্রশ্নমালা 12

1. x^3-8 2. $1-8x^3$ 3. $27a^3-64b^3$ 4. $a^3b^3+8a^3$
5. $x^3y^3z^3-1$ 6. a^6-b^6 7. $64x^6-729y^6$
8. $64a^6-729b^6$ 9. -54 10. 16 11. 0
12. $2(a^3+b^3+c^3)$ 13. $a^3+b^3+c^3-3$ 14. 2
15. $18xy$ 16. $3pq$ 17. 27 18 -1 19. 27
20. $8y^3$.

প্রশ্নমালা 13

1. $(x+y)(x^2-xy+y^2)$ 2. $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$
3. $(x-3)(x^2+3x+9)$ 4. $(3+a)(9-3a+a^2)$
5. $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$
6. $(a+1)(a-1)(a^2+a+1)(a^2-a+1)$
7. $3(3a+b)(9a^2-3ab+b^2)$
8. $(4x-3y)(16x^2+12xy+9y^2)$ 9. $2(a-5)(a^2+5a+25)$
10. $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
11. $3(3x+4y)(9x^2-12xy+16y^2)$
12. $(4a-5b)(16a^2+20ab+25b^2)$
13. $(xy+1)(x^2y^2-xy+1)$ 14. $(ab+c)(a^2b^2-abc+c^2)$

15. $(2-a-b)(4+2a+2b+2ab+a^2+b^2)$
16. $(3a+3b+1)(9a^2+9b^2+18ab-3a-3b+1)$
17. $(ab-4c)(a^2b^2+4abc+16c^2)$
18. $(2a-2b-1)(4a^2+4b^2+1-8ab+2a-2b)$
19. $2y(3x^2+y^2)$ 20. $27(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$
21. $(a-4b-4c)(a^2+4ab+4ac+16b^2+16c^2+32bc)$
22. $xy(x-y)(x^2+xy+y^2)$ 23. $(x+6)(7x^2+3x+9)$
24. $(a+b+c-1)(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac+a+b+c+1)$
25. $(2a+5b+3c)(4a^2+7b^2+9c^2+2ab-6ac+12bc)$
26. $(a+2)(a^2+a+1)$ 27. $2b(3a^2+b^2)$
28. $2(a+1)(4a^2+2a+1)$ 29. $(a+1)(a^2+5a+7)$
30. $(x+2)(x^2+7x+13)$ 31. $(a+b)(a-b)^2$
32. $(a-b+c)(a^2+b^2+c^2-2ab-ac+bc)$
33. $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
34. $mn(m-n)$.

প্রশ্নমালা 14

1. $(x+4)(x+5)$ 2. $(x-4)(x-5)$ 3. $(x+4)(x-5)$
4. $(x+20)(x-1)$ 5. $(x-4)(x-9)$ 6. $(x-2)(x-18)$
7. $(x+2)(x-18)$ 8. $(x+18)(x-2)$ 9. $(x+5)(x-3)$
10. $(x-2)(x-4)$ 11. $(a+2)(a-3)$ 12. $(x+8)(x+10)$
13. $(a-1)(a-7)$ 14. $(x+5)(x-7)$ 15. $(x+13)(x-11)$
16. $(x+15)(x-12)$ 17. $(a-12)(a-13)$ 18. $(x+16)(x-11)$
19. $(a+2b)(a-3b)$ 20. $(x-3y)(x-9y)$ 21. $(x-27)(x+3)$
22. $(x+3y)(x-2y)$ 23. $(p-9q)(p+8q)$
24. $(a+b+2)(a+b-3)$ 25. $(a+b-2)(a+b-3)$
26. $(x-p)(x+q)$ 27. $\left(a-\frac{2}{a}\right)\left(a+\frac{3}{a}\right)$
28. $(x+a+b)(x+a-b)$ 29. $(m+2)(m-2)(m^2+7)$
30. $(x+3a-b)(x-2a+b)$ 31. $(a+1)(a-1)(a+2)(a-2)$
32. $(x-1)(x-2)(x-8)(x+5)$ 33. $(a^3b^3-3)(a^3b^3+2)$
34. $(a+b+c+3)(a+b+c-7)$ 35. $(x^2+5x+3)(x^2+5x+7)$
36. $(x^2-3x-5)(x^2-3x-17)$ 37. $(x+4)(x+14)$
38. $(5+x)(1-x)$ 39. $x(x+2)(x-3)$ 40. $2(4+x)(7-x)$.

প্রশ্নমালা 15

1. $(4a+2)(a-3)$ 2. $(x+4)(5x-1)$ 3. $(x+1)(5x+4)$
4. $(x-5)(3x+5)$ 5. $(x+1)(3x-25)$ 6. $(2a+1)(4a-7)$
7. $(3x-2)(2x-3)$ 8. $(2x+5)(3x+2)$ 9. $(5a+4)(2a-7)$

10. $(3x+2)(2x-3)$ 11. $(6a+b)(2a-5b)$
12. $(p-4q)(3p-2q)$ 13. $(2x+7y)(3x-2y)$
14. $(a-3b)(3a-b)$ 15. $(3a-7)(7a-3)$
16. $(3x-2y)(4x-3y)$ 17. $(a+3b)(2a-9b)$
18. $(9a-11b)(11a-9b)$ 19. $(2x+y-1)(4x+2y-3)$
20. $(x+b)(ax-1)$ 21. $(3x+7y)(7x-3y)$
22. $(3x+11)(4x+7)$ 23. $(3-2x)(2x-1)$
24. $(7x-3)(2-x)$ 25. $(4x-3)(3x+4)$
26. $(5-x)(3x+1)$ 27. $(a+b-2)(3a+3b+4)$
28. $(a-2)(a^2+2a+4)(2a^3+3)$ 29. $(2a^2+5)(2a+3)(2a-3)$
30. $(4y+2x)(4y-2x)$ 31. $x(3x+2)(4x-5)$
32. $y(3x+5y)(2x-3y)$ 33. $(5a-b)(a+5b)$
34. $3y(2x-3)(5x+2)$.

প্রশ্নমালা 16

1. $(x+4)(x-7)$ 2. $(x+7)(x-5)$ 3. $(x+3)(x-14)$
4. $(4x+7y)(2x-y)$ 5. $(a+5)(3a-5)$ 6. $(x-1)(3x-25)$
7. $(1+2a)(3-5a)$ 8. $(x-1)(10x-11)$
9. $(x-4)(7x-2)$ 10. $(2x-5y)(2x+y)$.

প্রশ্নমালা 17

1. a 2. b 3. a^2b^2 4. $3a^3b^3$ 5. $3a^2b^3c^2$
6. x^2y^4 7. $b+c$ 8. $a^2(b+c)$ 9. $c^2(a+b)$ 10. $(a+b)(c+d)$
11. $(a+b)^2(c+d)^2$ 12. $a-b$ 13. $a+b$ 14. $a-b$
15. $(a-b)(b-c)$ 16. a^2-b^2 17. $x-y$ 18. $3(x+y)$
19. $x-y$ 20. $x-1$ 21. $x-y$ 22. $x+1$
23. $x+1$ 24. $x(x+2)$ 25. $a+b-c$ 26. $x+1$
27. $x-2$ 28. $x-2$ 29. $x-1$ 30. $2(a-1)$.

প্রশ্নমালা 18

1. abc 2. a^2b^2 3. a^2bc 4. $24a^2bc^2$ 5. $15abc(b+c)$
6. $4cde(c-d)^2$ 7. $60a^2c^2(a-c)^2$ 8. $40x^5y^4z^4$
9. $(a+b)^2(a-b)^2(a^2-ab+b^2)$ 10. $(x+y)(y+z)(z+x)$
11. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$
12. $(x+y)(x^2+y^2)(x-y)^2(x^3-y^3)$ 13. $(a-x)(b^2-y^2)$
14. $(x^6-y^6)(x^4-x^2y^2+y^4)$ 15. $(a+2)(a+1)(a^3-1)$
16. $(a^2-b^2)(3a-2b)(a^2+ab+b^2)$ 17. $(x+a)(x^2-b^2)$
18. $(a+b+c)(a-b-c)(b-a-c)$ 19. x^6-y^6
20. $(a-1)(2a-3)(2a+1)(3a+2)$ 21. $(x+3)(x-3)(x-4)(x-5)$
22. $120xy(x^2-y^2)$ 23. $x^2(x-1)(x^2-4)(x+3)$
24. $(x-3)(x^2+1)(x^2+5)$ 25. $(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)^2$,

26. $x^2(x-1)(x-2)(x+3)$ 27. $(x+1)(x+2)(x-2)(x+3)$
28. $(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^2+a+1)(a^2-a+1)$
29. $(x+2)(2x-1)(3x+1)$ 30. $12(x-2)(x-3)(x+4)(x+5)$
31. $(2x-3)(3x+2)(4x^2+6x+9)(4x^2-6x+9)$
32. $x^2(x+2)(x+5)(x-3)$ 33. $(x+2)(2x-1)(3x+1)$
34. $x^2(x^2-4)(x+4)$.

প্রশ্নমালা 19

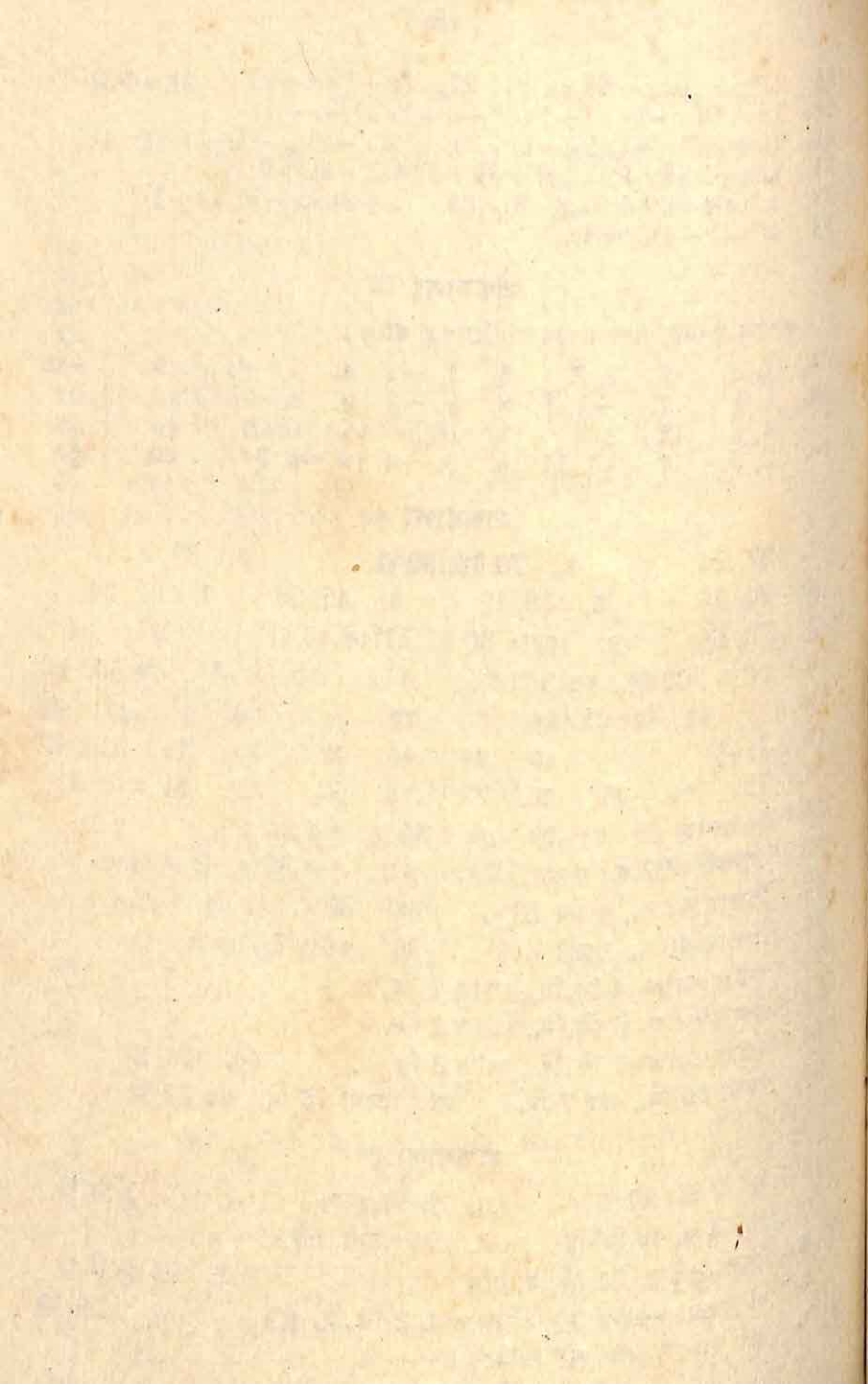
প্রথমে x-এর, পরে y-এর মান দেওয়া হইল :

1. 1, 2 2. 1, 2 3. 3, −1 4. 1, −2 5. 3, −2
6. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ 7. $-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ 8. $\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ 9. 2, −1 10. 3, 2
11. 4, 3 12. 2, $\frac{2}{3}$ 13. 10, 8 14. 12, 5 15. $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$
16. 2, 3 17. 13, 11 18. 3, −4 19. $\frac{1}{3}$, 3 20. $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}$

প্রশ্নমালা 20

1. 37, 24 2. 70 টা., 50 টা. 3. 32, 24
4. 70, 55 5. 18, 12 6. 45, 30 7. 32, 24
8. 72, 56 9. চেয়ার 30 টা., টেবিল 45 টা.
10. ঘোড়া 500 টা., গরু 300 টা. 11. ঘোড়া 800 টা., গরু 500 টা.
12. $\frac{5}{7}$ 13. $\frac{4}{7}$ 14. $\frac{5}{9}$ 15. $\frac{7}{10}$ 16. $\frac{4}{7}$ 17. $\frac{4}{15}$
18. $\frac{1}{5}, \frac{2}{15}$ 19. 34 20. 42 21. 35 22. 72
23. 75 24. 93 25. 72 26. 69 27. 24 অথবা 42
28. 56 অথবা 65 29. A-র 84 ব., B-র 24 ব.
30. লোকটির 32 ব., পুত্রের 11 ব. 31. A-র 36 ব., B-র 24 ব.
32. পিতার 42 ব., পুত্রের 18 ব. 33. 80 ব. 34. 45 ব.
35. পিতার 40 ব., পুত্রের 8 ব. 36. ঘণ্টায় $2\frac{1}{2}$ কি.মি.
37. ঘণ্টায় নৌকা 4 কি.মি., স্রোত 1 কি.মি.
38. ঘণ্টায় নৌকা 6 কি.মি., স্রোত 1 কি.মি.
39. ঘণ্টায় নৌকা 6 কি.মি., স্রোত 2 কি.মি. 40. 16, 28
41. দৈর্ঘ্য 10 মি., প্রস্থ 7 মি. 42. দৈর্ঘ্য 18 মি., প্রস্থ 12 মি. ।

প্রশ্নমালা 21

1. (i) 7 টা. 50 প. (ii) 8 কি.গ্রাম 2. (i) 7 কি.মি.
(ii) 4 ঘ. 40 মিনিট 3. 75 পয়সা, 6টি
4. বেলা 2 টায়, 24 কি.মি. দূরে 5. 15 সে.মি.
6. A রওনা হওয়ার 30 মিনিট পরে, 2 কি.মি. দূরে 7. 22500
8. 40 যান, 1 ঘণ্টা 50 মিনিটে ।

• জ্যামিতি •

GEOMETRY

[অষ্টম শ্রেণী]

নিম্নের সাঙ্কেতিক চিহ্নগুলি জ্যামিতিতে ব্যবহৃত হয় :

$=$ (সমান), $\neq$ (সমান নহে, অসমান).

$>$ (বৃহত্তর), (যথা $a>b$, b অপেক্ষা a বৃহত্তর),

$\not>$ (বৃহত্তর নহে)

$<$ (ক্ষুদ্রতর), (যথা $a<b$, b অপেক্ষা a ক্ষুদ্রতর)

$\not<$ (ক্ষুদ্রতর নহে), $\cong$ (সর্বসম)

$\parallel$ (সমান্তরাল), (যথা AB $\parallel$ CD অর্থাৎ AB ও CD সমান্তরাল),

$\perp$ (লম্ব), (যথা AB$\perp$CD অর্থাৎ CDর উপর AB লম্ব)

$\therefore$ (সেইজন্য), $\because$ (যেহেতু)

$\angle$ (কোণ), (যথা $\angle$ABC অর্থাৎ ABC কোণ),

$\triangle$ (ত্রিভুজ), $\odot$ (বৃত্ত), $\circ$ (পরিধি),

$\overleftrightarrow{AB}$ (সরলরেখা AB, যাহাকে দুইদিকে যথেচ্ছ বর্ধিত করা যায়)

$\overrightarrow{AB}$ (Ray বা রশ্মি AB, এখানে ABকে তীর-নির্দিষ্ট দিকে বর্ধিত করা যায়),

$\overline{AB}$ (AB রেখাংশ, ইহার একপ্রান্ত A, অপর প্রান্ত B)

$|AB|=|CD|$-র অর্থ AB ও CD রেখাংশদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান। যদি $|AB|>|CD|$ হয়, তবে $m\overline{AB}>m\overline{CD}$.

$\frown{AB}$ (চাপ AB)।

ϵ (এপসাইলন) : ইহা গ্রীক অক্ষর। $a\epsilon A$-এর অর্থ a, A-সেটের পদ। $a\not\epsilon A$ এর অর্থ a, A-সেটের পদ নহে।

$\subset$: $A\subseteq B$এর অর্থ A সেটটি B সেটের অন্তর্গত।

$\cup$: ইহা দুই সেটের যোগের চিহ্ন, $A\cup B$এর অর্থ A ও B সেটের যোগ (union).

$\cap$: ইহা দুই সেটের ছেদের চিহ্ন, $A\cap B$এর অর্থ A ও B সেট দুইটির ছেদ (Intersection).

[এই পুস্তকে সাধারণতঃ কোণের পরিমাণ নির্দেশ করিবার জন্য α (আল্‌ফা), β (বিটা), γ (গামা), θ (থিটা), ϕ (ফাই) প্রভৃতি গ্রীক অক্ষর ব্যবহার করা হইয়াছে।]

জ্যামিতি

প্রথম অধ্যায়

জ্যামিতিক যুক্তি পদ্ধতি

§ 1. সপ্তম শ্রেণীতে জ্যামিতিক আলোচনায় সক্রিয়তা এবং দৈনন্দিন অভিজ্ঞতা প্রাধান্য পাইয়াছিল। অষ্টম শ্রেণীতে জ্যামিতিক আলোচনার উদ্দেশ্য যুক্তির সাহায্যে বিভিন্ন জ্যামিতিক তত্ত্বের প্রতিষ্ঠার পদ্ধতির সহিত ছাত্রদের পরিচয় করানো।

জ্যামিতিতে যে সকল বিষয় আলোচিত হয় সেগুলিকে সাধারণভাবে **প্রতিজ্ঞা** (Proposition) বলা হয়। **উপপাদ্য** ও **সম্পাদ্য** ভেদে প্রতিজ্ঞা দুই প্রকার।

যে প্রতিজ্ঞায় কোন জ্যামিতিক তত্ত্বকে যুক্তিদ্বারা সিদ্ধ বা প্রতিষ্ঠিত করা হয়, তাহাকে **উপপাদ্য** (Theorem) বলে।

আর, যে প্রতিজ্ঞায় জ্যামিতিক কোন বিষয় বিবরণসহ অঙ্কন করিয়া দেখান হয় এবং সেই অঙ্কন যে নির্ভুল হইয়াছে তাহা যুক্তি দ্বারা প্রমাণ করা হয়, তাহাকে **সম্পাদ্য** (Problem) বলে।

প্রত্যেক জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞার সাধারণতঃ চারিটি অঙ্গ থাকে। যথা,—

(1) **সাধারণ নির্বচন** (General Enunciation)—সর্বপ্রথমে প্রতিজ্ঞাটির উদ্দেশ্যকে সরল ভাবে ব্যক্ত করা হয়। ইহাকে সাধারণ নির্বচন বলে।

(2) **বিশেষ নির্বচন** (Particular Enunciation)—সাধারণ নির্বচনের পর আলোচ্য বিষয়টিকে চিত্র ও অক্ষর দ্বারা বিশেষ ভাবে বুঝান হয়, ইহাকে বলে বিশেষ নির্বচন।

(৩) অঙ্কন (Construction)—বিশেষ নির্বচনের পর প্রয়োজন হইলে প্রমাণের পক্ষে আবশ্যক অঙ্কনগুলি করা হয়।

(4) প্রমাণ (Proof)—এই অংশে পর পর যথাক্রমে উপযুক্ত যুক্তি দ্বারা যাহা প্রমাণ করিবার কথা তাহা প্রতিষ্ঠিত করা হয়।

[দ্রষ্টব্য। (i) প্রত্যেক প্রতিজ্ঞায় কি স্বীকার করা আছে এবং তাহা হইতে কি সিদ্ধান্ত করিতে হইবে, তাহা ভাল করিয়া বুঝিয়া লইতে হইবে। প্রথমে স্বীকার বা কল্পনা (Data বা Hypotheses) এবং সিদ্ধান্ত (Conclusion) সম্বন্ধে স্পষ্ট ধারণা করিয়া লইতে হইবে।

(ii) সম্পাদ্যে যাহা স্বীকার করা থাকে, তাহাকে উপাত্ত (data) বলে।

(iii) যদি কোন প্রতিজ্ঞায় প্রতিষ্ঠিত সিদ্ধান্ত হইতে সহজেই এক বা একাধিক অন্য সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায়, তবে তাহাকে বা তাহাদিগকে অনুসিদ্ধান্ত (Corollary) বলে।]

বিপরীত উপপাদ্য (Converse theorem)—যদি কোন উপপাদ্যের স্বীকার ও সিদ্ধান্ত যথাক্রমে অন্য কোন উপপাদ্যের সিদ্ধান্ত ও স্বীকার হয়, তবে উহাদের প্রত্যেকটিকে অপরটির বিপরীত উপপাদ্য বলা হয়।

§ 2. **স্বতঃসিদ্ধ** (Axiom)—গণিত শাস্ত্রের এমন কতকগুলি সিদ্ধান্ত আছে, যেগুলির সত্যতা সম্বন্ধে কোন সন্দেহই থাকিতে পারে না। ঐগুলি অতি সহজেই স্বতঃ বা নিজ হইতেই প্রমাণিত বা সিদ্ধ বলিয়া ঐ স্বয়ংসিদ্ধ সিদ্ধান্তগুলিকে **স্বতঃসিদ্ধ** বলে।

নিম্নে কতিপয় স্বতঃসিদ্ধ প্রদত্ত হইল। তন্মধ্যে (i) হইতে (v) নম্বর পর্যন্ত সাধারণ স্বতঃসিদ্ধ এবং অবশিষ্টগুলি জ্যামিতিক স্বতঃসিদ্ধ।

স্বতঃসিদ্ধ (i) : যে সকল বস্তু অপর একটি বস্তুর সহিত সমান, তাহারা পরস্পর সমান।

স্বতঃসিদ্ধ (ii) : সমান সমান বস্তুর সহিত একই বস্তু বা সমান সমান বস্তু যোগ করিলে যোগফলগুলি পরস্পর সমান হইবে।

স্বতঃসিদ্ধ (iii) : সমান সমান বস্তু হইতে একই বস্তু বা সমান সমান বস্তু বিয়োগ করিলে বিয়োগফলগুলি সমান হইবে।

স্বতঃসিদ্ধ (iv) : সমান সমান বস্তুর একই গুণিতক বা একই সমাংশ পরস্পর সমান।

[একই গুণিতক অর্থাৎ 2 গুণ, 3 গুণ প্রভৃতি। একই সমাংশ অর্থাৎ $\frac{1}{2}$ অংশ, $\frac{1}{3}$ অংশ, $\frac{1}{4}$ অংশ প্রভৃতি।]

স্বতঃসিদ্ধ (v) : কোন বস্তু তাহার যে কোন অংশ অপেক্ষা বৃহত্তর।

স্বতঃসিদ্ধ (vi) : সকল সমকোণের পরিমাণ সমান।

স্বতঃসিদ্ধ (vii) : দুইটি সরলরেখা কোন সমতলক্ষেত্রকে সীমাবদ্ধ করিতে পারে না।

দ্বিতীয় অধ্যায়

সক্রিয়তার সাহায্যে জ্যামিতিক স্বতঃসিদ্ধের প্রমাণ

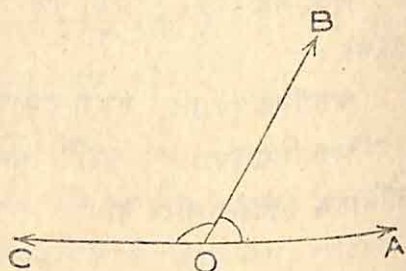
§ 3. পূরক ও সম্পূরক কোণ :—

(a) পূরককোণ :—দুইটি কোণের পরিমাপের যোগফল 90° হইলে কোণ দুইটিকে পরস্পরের পূরক কোণ বলা হয়। 40° ও 50° পরিমাপের দুইটি কোণ পরস্পরের পূরক।

(b) সম্পূরক কোণ :—দুইটি কোণের পরিমাপের যোগফল 180° হইলে কোণ দুইটিকে পরস্পরের সম্পূরক কোণ বলে। 100° ও 80° পরিমাপের দুইটি কোণ পরস্পরের সম্পূরক।

§ 4. রৈখিক যুগল :—

AOB কোণের $\overrightarrow{AO}$ বাহুকে C পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল (চিত্র 1 দেখ)। ফলে, দুইটি সন্নিহিত কোণ AOB ও BOC উৎপন্ন হইল। $\overrightarrow{OB}$ এই কোণ দুইটির সাধারণ বাহু। অপর বাহু দুইটি একই সরলরেখায় অবস্থিত। কোণ দুইটিকে একটি রৈখিক যুগল বলে। দুইটি সন্নিহিত কোণের বহিঃস্থ বাহুদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত হইলে একটি রৈখিক যুগল পাওয়া যায়।

B
C O A

চিত্র 1

চাঁদার সাহায্যে $\angle AOB$ ও $\angle COB$-এর পরিমাপ নির্ণয় কর। দেখিবে যে কোণ দুইটির পরিমাপের যোগফল 180° অর্থাৎ দুই

সমকোণ। এই প্রকার আরও কয়েকটি রৈখিক যুগল কোণ লইয়া সন্নিহিত কোণগুলির পরিমাপ চাঁদার সাহায্যে নির্ণয় কর। প্রত্যেক ক্ষেত্রেই দেখিবে সন্নিহিত কোণ দুইটির পরিমাপের সমষ্টি দুই সমকোণ। সুতরাং আমরা বলিতে পারি যে নিম্নের স্বতঃসিদ্ধটির সত্যতা সক্রিয়তার সাহায্যে প্রমাণিত হইল।

স্বতঃসিদ্ধ 1. একটি সরলরেখা অপর একটি সরলরেখার উপর দণ্ডায়মান হইলে উৎপন্ন সন্নিহিত কোণ দুইটির পরিমাপের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হয়।

এক্ষণে উপরের স্বতঃসিদ্ধের বিপরীত বক্তব্যটির সত্যতা পরীক্ষা করা যাক। $70°$ ও $110°$ পরিমাপের দুইটি কোণ এরূপে অঙ্কন কর যে, উহাদের একটি সাধারণ বাহু থাকে এবং অপর বাহু দুইটি ঐ সাধারণ বাহুর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হয়। দেখিবে যে কোণ দুইটি একটি রৈখিক যুগল অর্থাৎ কোণ দুইটির বহিঃস্থ বাহুদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত। পরিমাপের সমষ্টি $180°$ এইরূপ কয়েক জোড়া সন্নিহিত কোণ অঙ্কন কর। প্রত্যেক ক্ষেত্রেই দেখিবে যে বহিঃস্থ বাহু দুইটি একই সরলরেখায় অবস্থিত। সুতরাং বলা যায় যে,

স্বতঃসিদ্ধ 2. দুইটি সন্নিহিত কোণের পরিমাপের সমষ্টি দুই সমকোণ হইলে, তাহাদের বহিঃস্থ বাহুদ্বয় একই সরলরেখায় থাকিবে।

বিবিধ উদাহরণ 1

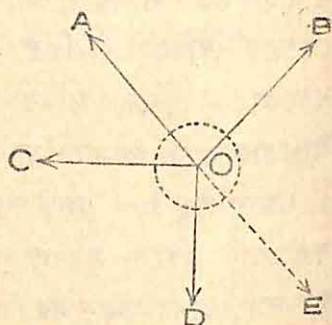
উদা. 1. কোন বিন্দুতে বিভিন্ন রশ্মি মিলিত হইলে যে সকল কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাদের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান।

মনে কর O বিন্দু হইতে উদ্ভূত $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ ও $\overrightarrow{OD}$ রশ্মিগুলি $\angle AOB$, $\angle BOD$, $\angle COD$ ও $\angle AOC$ চারিটি কোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ঐ কোণ চারিটির পরিমাণ একত্রযোগে চারি সমকোণের সমান।

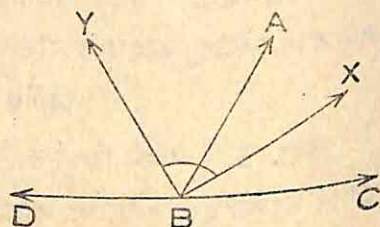
অঙ্কন। রশ্মি চারিটির মধ্যে যে কোন একটিকে, মনে কর AOকে, E পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল।

চিত্র 2

প্রমাণ। ∵ $\overleftrightarrow{AOE}$ একটি সরলরেখা, ∴ O বিন্দুতে $\overleftrightarrow{AE}$-র উভয় পার্শ্বে AOE ও EOA দুইটি সরলকোণ উৎপন্ন হইয়াছে।

এক্ষণে, $\angle AOB + \angle BOD + \angle COD + \angle AOC$ = সরলকোণ AOE + সরলকোণ EOA = 2 সমকোণ + 2 সমকোণ = 4 সমকোণ।

[দ্রষ্টব্য। উপরের উদাহরণে $\angle AOB$ এবং ইহার পরিমাণকে $\angle AOB$ দ্বারা নির্দেশ করা হইয়াছে। এই পুস্তকে আমরা এই প্রথাটি সর্বদা অনুসরণ করিব।]

উদা. **2**. একটি কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক ও বহিঃসমদ্বিখণ্ডক দুইটির অন্তর্ভূত কোণ এক সমকোণ।

প্রদত্ত ABC কোণের $\overline{CB}$ বাহুকে D বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল। $\angle ABD$ হইল $\angle ABC$এর বহিঃকোণ। মনে কর, $\overrightarrow{BX}$ ও $\overrightarrow{BY}$ যথাক্রমে $\angle ABC$ ও $\angle ABD$এর সমদ্বিখণ্ডক। প্রমাণ করিতে হইবে যে $\angle YBX$ এক সমকোণ।

চিত্র 3

প্রমাণ। $\angle ABX = \frac{1}{2} \angle ABC$, এবং $\angle ABY = \frac{1}{2} \angle ABD$,

$\therefore \angle YBX = \angle ABX + \angle ABY = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ABD)$

$= \frac{1}{2} \times 2$ সমকোণ $= 1$ সমকোণ।

উদা. 3. একটি কোণের পরিমাণ 98°, উহার সন্নিহিত কোণের পরিমাণ কত হইলে, সন্নিহিত কোণ দুইটির বহিঃস্থ বাহুদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে ?

$\because$ সন্নিহিত কোণদ্বয়ের সমষ্টি 2 সমকোণ হইলে, উহাদের বহিঃস্থ বাহুদ্বয় একই সরলরেখায় থাকে,

$\therefore$ এখানে $98^\circ +$ উহার সন্নিহিত কোণ $=$ দুই সমকোণ $= 180^\circ$,

$\therefore$ নির্ণেয় সন্নিহিত কোণ $= 180^\circ - 98^\circ = 82^\circ$.

উদা. 4. দুইটি সন্নিহিত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণটি সমকোণ হইলে উহাদের বহিঃস্থ বাহুদ্বয় একই সরলরেখায় থাকিবে।

[চিত্র 3 আঁক] মনে কর, $\overrightarrow{BX}$ ও $\overrightarrow{BY}$ যথাক্রমে ABC ও ABD দুইটি সন্নিহিত কোণের সমদ্বিখণ্ডক এবং উহাদের অন্তর্ভূত XBY কোণ এক সমকোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ একই সরলরেখায় অবস্থিত।

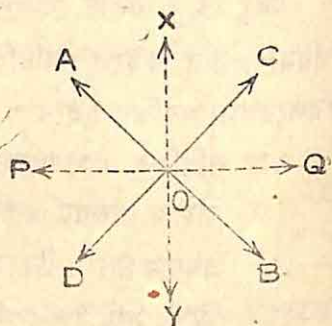
প্রমাণ। $\because \angle ABC = 2\angle ABX$ এবং $\angle ABD = 2\angle ABY$,

$\therefore \angle ABC + \angle ABD = 2(\angle ABX + \angle ABY)$

$= 2\angle XBY = 2$ সমকোণ।

$\therefore$ $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ একই সরলরেখায় অবস্থিত।

উদা. **5.** দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে যে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাদের সমদ্বিখণ্ডকগুলি দুইটি পরস্পর লম্বরেখা উৎপন্ন করে। **[C. U.]**

মনে কর, $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OY}$ ও $\overrightarrow{OQ}$ যথাক্রমে $\angle AOC$, $\angle AOD$, $\angle DOB$ ও $\angle BOC$ এর সমদ্বিখণ্ডক।

চিত্র 4

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\overleftrightarrow{XOY}$ ও $\overleftrightarrow{POQ}$ দুইটি পরস্পর লম্বরেখা।

প্রমাণ। $\angle AOX = \frac{1}{2}\angle AOC$ এবং $\angle AOP = \frac{1}{2}\angle AOD$.

$\therefore \quad \angle POX = \angle AOX + \angle AOP$

$= \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle AOD) = \frac{1}{2} \times 2$ সমকোণ $= 1$ সমকোণ।

অনুরূপে, $\angle POY$, $\angle QOY$ ও $\angle QOX$ প্রত্যেকটি এক সমকোণ।

আবার, $\because \angle POX + \angle POY = 1$ সমকোণ $+ 1$ সমকোণ

$= 2$ সমকোণ,

$\therefore \quad \overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ একই সরলরেখায় অবস্থিত।

অনুরূপে, $\overrightarrow{OP}$ ও $\overrightarrow{OQ}$ একই সরলরেখা।

অতএব, $\overleftrightarrow{XOY}$ ও $\overleftrightarrow{POQ}$ দুইটি পরস্পর লম্বরেখা হইল।

প্রশ্নমালা 1

1. নিম্নলিখিত কোণগুলির পূরক কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর :—
   (a) $65°$ (b) $55°25'$ (c) $45°36'35''$

2. দুইটি সূক্ষ্মকোণ পরস্পর সম্পূরক হইতে পারে কি ?

3. দুইটি পূরককোণের একটি অপরটির 5 গুণ। কোণ দুইটি কত ডিগ্রি ?

4. একটি কোণ তাহার সম্পূরক কোণের চারিগুণ হইলে কোণ দুইটির পরিমাণ কত ?

5. পার্শ্বের চিত্রে $\overleftrightarrow{AB}$র সহিত $\overrightarrow{CO}$ রশ্মি O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে এবং ∠XOA ও ∠YOB যথাক্রমে 65° ও 25°। প্রমাণ কর যে $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত।

চিত্র 5

6. প্রমাণ কর যে দুইটি সরলরেখা অপর কোন সরলরেখার সহিত একই পার্শ্বে কোন বিন্দুতে মিলিত হইলে যে তিনটি কোণ উৎপন্ন হয় তাহাদের সমষ্টি দুই সমকোণ।

7. প্রমাণ কর যে দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে উৎপন্ন কোণ চারিটির সমষ্টি 4 সমকোণ।

8. $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। যদি ∠AOC সমকোণ হয়, তবে প্রমাণ কর যে অন্য কোণ তিনটির প্রত্যেকটি সমকোণ।

9. দুইটি সন্নিহিত কোণের মধ্যে একটি 96° ; অপরটির পরিমাণ কত হইলে উহাদের বহিঃস্থ বাহুদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে ?

10. $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{CO}$ ও $\overrightarrow{DO}$ চারিটি রশ্মি। ∠AOB≅∠BOC≅∠COA≅∠DOA≅এক সমকোণ। প্রমাণ কর যে রশ্মি চারিটি দুইটি সরলরেখা উৎপন্ন করে।

11. প্রমাণ কর যে একটি সরলরেখার কোন বিন্দুতে উহার উভয় পার্শ্বে দুইটি লম্ব টানিলে ঐ লম্ব দুইটি একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

12. $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার O বিন্দুতে উহার দুই বিপরীত পার্শ্বে $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ দুইটি রশ্মি টানা হইল ; $\angle AOX$ ও $\angle BOY$ সর্বসম হইলে প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{OX}$ এবং $\overrightarrow{OY}$ একই সরলরেখায় অবস্থিত।

---

§ **5**. **সমান্তরাল সরলরেখা** :—তোমরা পূর্বেই শিখিয়াছ যে একই সমতলে অবস্থিত দুইটি সরলরেখাকে উভয়দিকে বর্ধিত করিলে সরলরেখা দুইটি যদি পরস্পর ছেদ না করে, তবে তাহাদিগকে পরস্পর সমান্তরাল বলে।

ঘরের মেঝের, টেবিলের বা রুলারের বিপরীত দুইটি ধার সমান্তরাল সরলরেখার উদাহরণ। যদি দুইটি সরলরেখা $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ পরস্পর সমান্তরাল হয়, তবে লেখা হয় $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. $\parallel$ চিহ্নটি সমান্তরাল-এর চিহ্ন।

দুইটি রেখাংশ যে দুইটি সরলরেখার অংশ, সেই দুইটি সরলরেখা সমান্তরাল হইলে সরলরেখাংশ দুইটিও সমান্তরাল হইবে।

চিত্রে $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সরল রেখাদ্বয় সমান্তরাল বলিয়া $\overline{PQ}$ ও $\overline{RS}$ রেখাংশ দুইটিও সমান্তরাল।

চিত্র 6

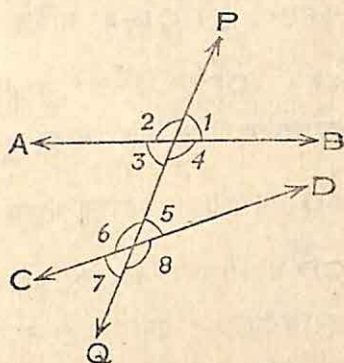
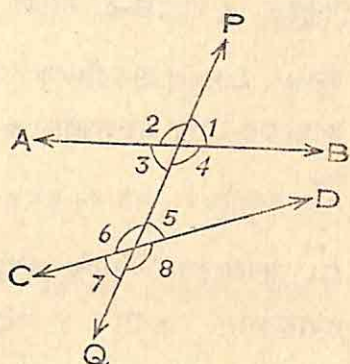
§ **5.1.** **অনুরূপ, একান্তর, অন্তঃস্থ ও বহিঃস্থ বা বহিঃকোণ**:—

$\overleftrightarrow{PQ}$ সরলরেখা $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা দুইটিকে ছেদ করিয়াছে। $\overleftrightarrow{PQ}$কে $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা দুইটির ভেদক বলা হয়।

চিত্রে 1 ও 5, 2 ও 6, 3 ও 7 এবং 4 ও 8 কোণগুলিকে পরস্পরের অনুরূপ কোণ বলে।

চিত্র 7

3 ও 5, 4 ও 6, 1 ও 7 এবং 2 ও 8 কোণগুলিকে পরস্পরের একান্তর কোণ বলে।

3, 4, 5 ও 6 কোণগুলি $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা দুইটির অন্তঃস্থ কোণ।

1, 2, 7 ও 8 কোণগুলি $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা দুইটির বহিঃস্থ কোণ।

নিম্নে সমান্তরাল সরলরেখা সম্বন্ধীয় দুইটি স্বতঃসিদ্ধের সত্যতা সক্রিয়তার সাহায্যে পরীক্ষা করা হইতেছে।

স্বতঃসিদ্ধ 3. একটি সরলরেখা অপর দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করিলে যদি দুইটি অনুরূপ কোণ পরস্পর সর্বসম হয়, তবে সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল হইবে।

চিত্র 8

একটি রুলার একটি কাগজের উপর স্থাপন কর। রুলারটির নীচের ধার বরাবর একটি সরলরেখা $\overleftrightarrow{AB}$ অঙ্কন কর এবং উপরের ধারে একটি বিন্দু P লও। এইবার রুলারটি সরাইয়া লও। P বিন্দু দিয়া একটি সরলরেখা $\overleftrightarrow{PQ}$ টান। মনে কর $\overleftrightarrow{PQ}$ $\overleftrightarrow{AB}$কে Q বিন্দুতে

ছেদ করে। $\overleftrightarrow{QP}$কে বর্ধিত কর। বর্ধিত $\overleftrightarrow{QP}$ সরলরেখার উপর P বিন্দুতে $\angle PQB$-র সহিত সর্বসম একটি কোণ $\angle EPD$ অঙ্কন কর। $\overrightarrow{DP}$কে উভয়দিকে বর্ধিত কর। এইবার রুলারটিকে পুনরায় কাগজের উপর এরূপভাবে স্থাপন কর যেন রুলারটির নীচের ধার $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখা বরাবর থাকে। দেখিবে যে, রুলারটির উপরের ধার $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা বরাবর থাকিবে। সুতরাং $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ পরস্পর সমান্তরাল। এখানে $\angle PQB$ ও $\angle EPD$ দুইটি অনুরূপ কোণ এবং উহারা সর্বসম হওয়ায় $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখাদ্বয় সমান্তরাল হইয়াছে।

বিকল্প পদ্ধতি ঃ কাগজের উপর $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{EF}$ দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখা অঙ্কন কর। মনে কর Q উহাদের ছেদবিন্দু।

$\overleftrightarrow{EF}$ সরলরেখার একই দিকে উহার যে কোন P বিন্দুতে $\angle EQB$র সহিত সর্বসম $\angle EPD$ অঙ্কন কর। $\overrightarrow{DP}$কে C পর্যন্ত বর্ধিত কর। [চিত্র 8]। $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা দুইটির $\overleftrightarrow{EF}$ একটি ভেদক এবং $\angle EPD$ ও $\angle EQB$ অনুরূপ কোণ দুইটি সর্বসম।

এক্ষণে যদি কাগজের সমতলে $\overrightarrow{PQ}$-এর দিকে এবং $|PQ|$ সরণ দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি চলন প্রয়োগ করা হয়, তবে P-র নূতন অবস্থান হইবে Q বিন্দু এবং $\overleftrightarrow{EF}$ সরলরেখার দিক চলনের দিক হওয়ায় $\overline{PQ}$ রেখাংশ $\overleftrightarrow{EF}$ সরলরেখা বরাবর থাকিবে।

এখন কাগজ কাটিয়া একটি পরীক্ষা করা যাক।

পরীক্ষা ঃ কাঁচি দিয়া $\overleftrightarrow{CD}$ বরাবর কাগজের উপরের অংশ কাটিয়া লও এবং ঐ অংশটিকে এরূপে নীচের অংশে স্থাপন কর যেন P বিন্দু Q বিন্দুর উপর এবং $\overrightarrow{PE}$ রশ্মি যেন $\overrightarrow{QE}$ রশ্মির উপর পড়ে। এই স্থাপনকে *t* চলনের ফল বলা যাইতে পারে।

এখন দেখিবে $\overrightarrow{PD}$ রশ্মি $\overrightarrow{QB}$ রশ্মির উপর অর্থাৎ $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার উপর সমাপতিত হইয়াছে। অতএব *t* চলনের ফলে $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখার প্রতিবিম্ব হইল $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখা। এক্ষণে, যেহেতু চলনের ফলে কোন সরলরেখার প্রতিবিম্ব একটি সমান্তরাল সরলরেখা হয়, সেজন্য $\overleftrightarrow{CD}$ ও $\overleftrightarrow{AB}$ পরস্পর সমান্তরাল।

অতএব স্বতঃসিদ্ধটি প্রমাণিত হইল।

[কর্তিত অংশ] [কর্তিত অংশ $\overrightarrow{QB}$ রশ্মির উপর স্থাপনের পরের অবস্থা।]

স্বতঃসিদ্ধ 4. দুইটি পরস্পর ছেদী সরলরেখা উভয়ই অপর একটি সরলরেখার সমান্তরাল হইতে পারে না। ইহাকে Playfair-এর স্বতঃসিদ্ধ বলে।

মনে কর $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ দুইটি পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখা : $\overleftrightarrow{AB}$কে ছেদ করিয়াছে এরূপ একটি সরলরেখা l লও। lকে বর্ধিত কর। দেখিবে l, $\overleftrightarrow{CD}$কে ছেদ করে। সুতরাং l, $\overleftrightarrow{CD}$-র সমান্তরাল নহে। $\overleftrightarrow{AB}$কে ছেদ করে এরূপ কয়েকটি সরলরেখা লইয়া সক্রিয়তাটির আরও কয়েকবার পুনরাবৃত্তি কর। দেখিবে যে, সকল ক্ষেত্রেই সরলরেখাগুলি $\overleftrightarrow{CD}$কে ছেদ করে।

চিত্র 9

§ 6. **ত্রিভুজের সর্বসমতা :**—প্রত্যেকটি ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গ বা অংশ—তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ। যদি একটি ত্রিভুজের অংশ ছয়টি অপর একটি ত্রিভুজের অনুরূপ অংশগুলির সহিত সর্বসম হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটিকে সর্বসম বলে।

সুতরাং কোন ত্রিভুজকে অপর একটি ত্রিভুজের উপর স্থাপন করিলে যদি ত্রিভুজ দুইটি সমাপতিত হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে এবং ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফলও সমান হইবে।

§ 7. **অনুরূপ বাহু ও অনুরূপ কোণ :**—যদি একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির সহিত অপর একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির একটি সম্পর্ক কল্পনা করা যায়, তবে সম্পর্কযুক্ত শীর্ষবিন্দুগুলির সংযোজক বাহুগুলিকে অনুরূপ বাহু এবং সম্পর্কযুক্ত শীর্ষবিন্দুস্থ কোণগুলিকে অনুরূপ কোণ বলা হয়।

ABC ও DEF ত্রিভুজে যদি $A \rightarrow D$, $B \rightarrow E$, $C \rightarrow F$ হয় তবে, $\overline{AB}$ ও $\overline{DE}$, $\overline{BC}$ ও $\overline{EF}$, $\overline{CA}$ ও $\overline{FD}$ অনুরূপ বাহু এবং

∠ABC ও ∠DEF, ∠BCA ও ∠EFD এবং ∠CAB ও ∠FAD অনুরূপ কোণ। নিম্নে দুইটি ত্রিভুজের সর্বসমতা বিষয়ক দুইটি স্বতঃসিদ্ধের সত্যতা সক্রিয়তার সাহায্যে প্রমাণ করা হইতেছে।

স্বতঃসিদ্ধ 5. যদি একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের অনুরূপ দুইটি বাহুর সহিত সর্বসম হয় এবং ঐ বাহু দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয় সর্বসম হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

[দ্রষ্টব্য : স্বতঃসিদ্ধ 5কে দুইটি ত্রিভুজের সর্বসমতার বাহু-কোণ-বাহু (SAS) শর্ত বলে। SAS-এর অর্থ বাহু (side), কোণ (angle), বাহু (side). স্বতঃসিদ্ধ 6কে কোণ-কোণ-বাহু (AAS) শর্ত বলে।]

স্বতঃসিদ্ধ 5-এর সত্যতা পরীক্ষা :—

মনে কর ABC একটি প্রদত্ত ত্রিভুজ।

$\overline{AB}$ সরলরেখাংশের সহিত সর্বসম একটি সরলরেখাংশ $\overline{DE}$ লও।

চিত্র 10

D বিন্দুতে BAC কোণের সহিত সর্বসম EDX কোণটি অঙ্কন কর। $\overrightarrow{DX}$ বাহু হইতে $\overline{AC}$ রেখাংশের সহিত সর্বসম $\overline{DF}$ রেখাংশ কাটিয়া লও। EF যোগ কর। DEF একটি ত্রিভুজ হইল। চাঁদা দ্বারা DEF ও DFE কোণ দুইটির পরিমাণ নির্ণয় কর।

দেখিবে যে, $\angle DEF \cong \angle ABC$ এবং $\angle DFE \cong \angle ACB$.
আবার ডিভাইডার দ্বারা দেখ যে $\overline{BC} \cong \overline{EF}$.

এক্ষণে যদি ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে একটি সম্পর্ক কল্পনা করা যায় যে, $A \to D$, $B \to E$, $C \to F$, তবে ABC ত্রিভুজের ছয়টি অংশের প্রত্যেকটি অংশ DEF ত্রিভুজের অনুরূপ অংশটির সহিত সমান হইবে। সুতরাং ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

অঙ্কন দ্বারা ত্রিভুজ দুইটির একটির দুইটি বাহুকে যথাক্রমে অন্যটির অনুরূপ বাহু দুইটির সহিত এবং বাহু দুইটির অন্তর্ভূর্ত কোণদ্বয় সর্বসম করিয়া দেখা গেল ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইতেছে। সুতরাং স্বতঃসিদ্ধটির সত্যতা নির্ণীত হইল।

বিকল্প প্রণালী ঃ একটি কাগজের উপর এরূপ যে কোন দুইটি ত্রিভুজ ABC ও DEF লও যেন $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ এবং $\angle BAC \cong \angle EDF$ হয়। DEF ত্রিভুজটিকে কাটিয়া ABC ত্রিভুজের উপর এরূপে স্থাপন কর যে, E বিন্দু যেন B বিন্দুর উপর এবং $\overline{EF}$ বাহু যেন $\overline{BC}$ বাহুর উপর পড়ে। দেখিবে যে ত্রিভুজ দুইটি সমাপতিত হইতেছে। সুতরাং ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

স্বতঃসিদ্ধ 6. যদি একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণের সহিত সর্বসম হয় এবং প্রথমটির একটি বাহু অপরটির অনুরূপ বাহুর সহিত সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

স্বতঃসিদ্ধ 5এর ন্যায় অঙ্কন অথবা কাগজ কাটিয়া স্বতঃসিদ্ধ 6এর সত্যতাও প্রমাণ করা যাইবে। ছাত্রদের এই স্বতঃসিদ্ধটি পরীক্ষা করিয়া দেখিতে বলা হইতেছে। উহা তাহাদের একটি অনুশীলনী হিসাবে দেওয়া হইল।

[দ্রষ্টব্য : ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটির শীর্ষবিন্দুগুলির সম্পর্ক বলিতে A→D, B→E, C→F সম্পর্ক বুঝাইবে। A→E, B→F, C→D সম্পর্ককে ABC ও EFD ত্রিভুজদ্বয়ে শীর্ষবিন্দুগুলির সম্পর্ক বলা হইবে। এইক্ষেত্রে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইলে ABC ও EFD ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম বলা হইবে এবং 'ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম' বিবৃতিটি অশুদ্ধ হইবে।]

বিবিধ উদাহরণ 2

উদা. 1. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমিকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [C. U.]

ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\overline{AD}$ রেখা $\angle BAC$কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া $\overline{BC}$ ভূমিকে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $\overline{BD} \cong \overline{DC}$ এবং $\overline{AD}$ রেখা $\overline{BC}$-র উপর লম্ব।

প্রমাণ। $\triangle ABD$ ও $\triangle ACD$এর $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\overline{AD}$ সাধারণ বাহু এবং অন্তর্ভূক্ত $\angle BAD \cong$ অন্তর্ভূক্ত $\angle CAD$,

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ $\overline{BD} \cong \overline{DC}$ এবং $\angle ADB \cong \angle ADC$, কিন্তু ইহারা সন্নিহিত কোণ বলিয়া প্রত্যেকে এক সমকোণ। ∴ $\overline{AD}$ রেখা $\overline{BC}$-র উপর লম্ব।

চিত্র 11

উদা. 2. ABCDEF একটি সুষম ষড়্ভুজ। প্রমাণ কর যে, ACE একটি সমবাহু ত্রিভুজ। [C. U. 1911]

ABCDEF একটি সুষম ষড়্ভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে $\triangle ACE$ সমবাহু।

AC, AE ও CE যোগ কর।

প্রমাণ। $\triangle ABC$ ও $\triangle AFE$-র

$\overline{AB} \cong \overline{AF}$, $\overline{BC} \cong \overline{FE}$

এবং $\angle ABC \cong \angle AFE$

($\because$ সুষম ষড়্ভুজের সব বাহু ও কোণই সমান),

চিত্র 12

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। $\therefore$ $\overline{AC} \cong \overline{AE}$.

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে $\triangle ABC \cong \triangle CDE$,

$\therefore$ $\overline{AC} \cong \overline{CE}$.

$\therefore$ $\overline{AE} \cong \overline{AC} \cong \overline{CE}$, $\therefore$ ACE একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

উদা. 3. একটি কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু ঐ কোণের বাহু দুইটি হইতে সমদূরবর্তী। [D. B. '35]

মনে কর, $\angle BAC$র সমদ্বিখণ্ডক $\overrightarrow{AD}$র উপর O যে-কোন একটি বিন্দু। O হইতে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$র উপর যথাক্রমে $\overline{OE}$ ও $\overline{OF}$ লম্ব টান। প্রমাণ করিতে হইবে যে $\overline{OE} \cong \overline{OF}$.

প্রমাণ। $\triangle OEA$ ও $\triangle OFA$র

$\angle OAE \cong \angle OAF$ (স্বীকার),

$\angle OEA \cong \angle OFA$ (সমকোণ)

এবং $\overline{OA}$ বাহু সাধারণ,

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম [স্বতঃ (উপ.)]।

$\overline{OE} \cong \overline{OF}$.

চিত্র 13

উদা. 4. ABCD চতুর্ভুজের $\overline{AC}$ কর্ণ যদি $\angle BAD$ ও $\angle BCD$কে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে প্রমাণ কর যে, $\overline{BD}$কে $\overline{AC}$ সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে। [C. U. '48]

[Hints : মনে কর $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ কর্ণকে O বিন্দুতে ছেদ করিল। $\triangle ABC$ ও $\triangle ADC$র $\angle BAC \cong \angle DAC$, $\angle BCA \cong \angle DCA$ এবং $\overline{AC}$ বাহু সাধারণ, $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। $\therefore$ $\overline{AB} \cong \overline{AD}$.

চিত্র 14

আবার, $\triangle ABO$ ও $\triangle ADO$র $\overline{AB} \cong \overline{AD}$, $\overline{AO}$ বাহু সাধারণ এবং $\angle BAO \cong \angle DAO$,

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore$ $\overline{BO} \cong \overline{DO}$ এবং $\angle AOB \cong \angle AOD$, ইহারা সন্নিহিত সরল কোণ বলিয়া প্রত্যেকটি এক সমকোণ। $\therefore$ $\overline{AC}$, $\overline{BD}$কে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করিল।]

প্রশ্নমালা 2

1. কোন ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

2. কোন বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় সমান।

3. চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটি পরস্পর সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত হইলে চতুর্ভুজটি সমবাহু হইবে।

4. ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর লম্বসমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের ছেদবিন্দু উহার কৌণিক বিন্দুগুলি হইতে সমদূরবর্তী।

5. একটি ত্রিভুজের যে কোন দুই কোণ ও তৎসংলগ্ন বাহু অপর একটি ত্রিভুজের দুই কোণ ও তৎসংলগ্ন বাহুর সমান হইলে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইবে।

6. কোন ত্রিভুজের শিরঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমির উপর লম্ব হইলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

7. ABCD চতুর্ভুজের $\overline{BD}$ কর্ণ ABC ও ADC কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক। প্রমাণ কর যে, $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ কর্ণকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

---

§ 8. বৃত্তসম্পর্কীয় স্বতঃসিদ্ধ :

স্বতঃসিদ্ধ 7. দুইটি সর্বসম বৃত্তের (অথবা একই বৃত্তের) বিভিন্ন সর্বসম জ্যা বৃত্তের সমান সমান চাপ ছেদ করে এবং কেন্দ্রে পরস্পর সর্বসম কোণ উৎপন্ন করে। বিপরীতক্রমে দুইটি সর্বসম বৃত্তের (অথবা একই বৃত্তের) বিভিন্ন জ্যা সমান সমান চাপ ছেদ করিলে অথবা কেন্দ্রে পরস্পর সর্বসম কোণ উৎপন্ন করিলে জ্যাগুলি পরস্পর সর্বসম হইবে।

চিত্র 15

O এবং O′ কেন্দ্রবিশিষ্ট দুইটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ r. সুতরাং বৃত্ত দুইটি সমান। বৃত্ত দুইটির পরিধি বরাবর দুইটি সূতা কেলিয়া পরিধি

দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। দেখিবে পরিধি দুইটির দৈর্ঘ্য সমান। বৃত্ত দুইটির পরস্পর সর্বসম $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ ও $\overline{EF}$ তিনটি জ্যা অঙ্কন কর। জ্যাগুলি AXB, CYD ও EZF উপচাপ তিনটি উৎপন্ন করিল। এই উপচাপগুলি বরাবর সূতা ফেলিয়া উহাদের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিয়া দেখ, দৈর্ঘ্যগুলি সমান। এখানে অধিচাপের দৈর্ঘ্য = পরিধির দৈর্ঘ্য – উপচাপের দৈর্ঘ্য। অতএব অধিচাপগুলির দৈর্ঘ্যগুলিও সমান। সুতরাং দেখা গেল যে সর্বসম জ্যাগুলি সমান বৃত্ত দুইটির সমান দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট চাপ ছেদ করে।

এক্ষণে, AO, BO, CO, DO, EO′ ও FO′ যোগ কর।

চাঁদা দ্বারা $\angle AOB$, $\angle COD$ ও $\angle EO'F$এর পরিমাপ নির্ণয় কর। দেখিবে যে পরিমাপগুলি সমান। সুতরাং কোণ তিনটি পরস্পর সর্বসম। সুতরাং পরীক্ষাদ্বারা প্রমাণিত হইল যে, সমান সমান বৃত্তের অথবা একই বৃত্তের পরস্পর সর্বসম বিভিন্ন জ্যা বৃত্তগুলির কেন্দ্রে পরস্পর সর্বসম কোণ উৎপন্ন করে।

কাগজ কাটিয়া প্রমাণ : একটি কাগজে চিত্র 15 আঁকিয়া কাঁচি দিয়া OCYD অংশ কাটিয়া লও এবং উহাকে OAXB অংশের উপর একই দিকে এরূপে স্থাপন কর যেন $\overline{CD}$ জ্যা $\overline{AB}$-র সহিত সমাপতিত হয়। দেখিবে ঐ অংশদ্বয় সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া গিয়াছে। অতএব চাপ AXB ও চাপ CYD এবং $\angle AOB$ ও $\angle COD$ সর্বসম। অনুরূপে কর্তিত অংশ O′FZEএর উপর স্থাপন করিয়াও ইহা প্রমাণিত হয়।

বিপরীত বক্তব্যটির সত্যতা প্রমাণের জন্য O_1 এবং O_2 কেন্দ্র-বিশিষ্ট একই ব্যাসার্ধের দুইটি বৃত্ত লও এবং কেন্দ্রে PO_1Q,

RO_1S ও LO_2M তিনটি পরস্পর সর্বসম কোণ অঙ্কন কর। দৈর্ঘ্য

চিত্র 16

মাপনীর সাহায্যে $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$ ও $\overline{LM}$ জ্যাগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিলে দেখিবে যে জ্যাগুলি পরস্পর সর্বসম।

আবার, সূতার সাহায্যে বৃত্ত দুইটির কয়েকটি সমান চাপ কাটিয়া লইয়া দেখিতে পার যে চাপগুলি পরস্পর সর্বসম জ্যা উৎপন্ন করে।

পূর্বের ন্যায় কাগজ কাটিয়া তোমরা এই সত্যতা পরীক্ষা কর।

তৃতীয় অধ্যায়

উপপাদ্য

§ 9. **বিপ্রতীপ কোণ**ঃ তোমরা শিখিয়াছ যে দুইটি সমবিন্দু রশ্মি একটি এবং একটিমাত্র কোণ উৎপন্ন করে। যদি রশ্মি দুইটিকে বিপরীত দিকে বর্ধিত করা হয়, তবে একটির পরিবর্তে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয়। অর্থাৎ দুইটি সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয়। চিত্রে $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা দুইটি O বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে।

চিত্র 17

AOC, COB, BOD ও DOA কোণ চারিটি উৎপন্ন হইল।

$\angle AOD$ ও $\angle BOC$কে এবং $\angle BOD$ ও $\angle AOC$কে পরস্পর বিপ্রতীপ কোণ বলে।

উপপাদ্য 1

দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে বিপ্রতীপ কোণগুলি পরস্পর সর্বসম হইবে।

$\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ দুইটি সরলরেখা O বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle AOC \cong \angle BOD$,

এবং $\angle AOD \cong \angle BOC$. [চিত্র 17 অঙ্কন কর।]

প্রমাণ। $\overleftrightarrow{AO}$ সরলরেখা $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখার সহিত O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে,

$\therefore \quad \angle AOC + \angle AOD = 2$ সমকোণ [স্বতঃ উপ. 1]

আবার, $\overrightarrow{DO}$ সরলরেখা $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার সহিত O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে, $\therefore$ $\angle AOD + \angle BOD = 2$ সমকোণ

[স্বতঃ. উপ. 1]

$\therefore$ $\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$ [স্বতঃ (i)]

এই দুই সমান বস্তু হইতে $\angle AOD$ বিয়োগ করিলে

অবশিষ্ট $\angle AOC \cong$ অবশিষ্ট $\angle BOD$ [স্বতঃ (ii)]

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, $\angle AOD \cong \angle BOC$.

বিকল্প প্রমাণ :—

[নূতন পাঠ্যক্রমে সপ্তম শ্রেণীতে **প্রতিফলন, চলন, আবর্তন** প্রভৃতি রূপান্তর ও তাহাদের ধর্ম সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে। তাহাদের সাহায্যে বিভিন্ন জ্যামিতিক উপপাদ্যের প্রমাণ সম্ভব। এই পুস্তকে ঐ ধর্মগুলির সাহায্যে কয়েকটি উপপাদ্যের বিকল্প (অর্থাৎ অন্য পদ্ধতিতে) প্রমাণ দেওয়া হইল।]

মনে কর, $\overrightarrow{OD}$ ও $\overrightarrow{OB}$ রশ্মি দুইটির প্রতিসাম্য রেখা $\overleftrightarrow{PQ}$ এবং $\overrightarrow{OD}$ ও $\overrightarrow{OA}$ রশ্মি দুইটির প্রতিসাম্য রেখা $\overleftrightarrow{RS}$। সুতরাং $\overleftrightarrow{PQ}$ সরলরেখায় প্রতিফলনের ফলে $\overrightarrow{OB}$-র প্রতিবিম্ব $\overrightarrow{OD}$. আবার $\overleftrightarrow{RS}$ সরলরেখায় প্রতিফলনের ফলে $\overrightarrow{OD}$-র প্রতিবিম্বটি $\overrightarrow{OA}$. অতএব $\overleftrightarrow{PQ}$ ও $\overleftrightarrow{RS}$ সরলরেখা দুইটিতে পর পর প্রতিফলনের ফলে $\overrightarrow{OB}$র প্রতিবিম্ব হইল $\overrightarrow{OA}$.

চিত্র 18

অনুরূপে $\overleftrightarrow{PQ}$ ও $\overleftrightarrow{RS}$ সরলরেখা দুইটিতে পর পর প্রতিফলনের ফলে $\overrightarrow{OD}$-র প্রতিবিম্ব হইবে $\overrightarrow{OC}$.

প্রশ্নমালা 1

1. নিম্নলিখিত কোণগুলির পূরক কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর :—
   (a) 65° (b) 55°25′ (c) 45°36′35″
2. দুইটি স্থূলকোণ পরস্পর সম্পূরক হইতে পারে কি ?
3. দুইটি পূরককোণের একটি অপরটির 5 গুণ। কোণ দুইটি কত ডিগ্রি ?
4. একটি কোণ তাহার সম্পূরক কোণের চারিগুণ হইলে কোণ দুইটির পরিমাণ কত ?

5. পার্শ্বের চিত্রে $\overleftrightarrow{AB}$র সহিত $\overrightarrow{CO}$ রশ্মি O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে এবং ∠XOA ও ∠YOB যথাক্রমে 65° ও 25°। প্রমাণ কর যে $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত।

চিত্র 5

6. প্রমাণ কর যে দুইটি সরলরেখা অপর কোন সরলরেখার সহিত একই পার্শ্বে কোন বিন্দুতে মিলিত হইলে যে তিনটি কোণ উৎপন্ন হয় তাহাদের সমষ্টি দুই সমকোণ।

7. প্রমাণ কর যে দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে উৎপন্ন কোণ চারিটির সমষ্টি 4 সমকোণ।

8. $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। যদি ∠AOC সমকোণ হয়, তবে প্রমাণ কর যে অন্য কোণ তিনটির প্রত্যেকটি সমকোণ।

9. দুইটি সন্নিহিত কোণের মধ্যে একটি 96° ; অপরটির পরিমাণ কত হইলে উহাদের বহিঃস্থ বাহুদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে ?

10. $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{CO}$ ও $\overrightarrow{DO}$ চারিটি রশ্মি। ∠AOB ≅ ∠BOC ≅ ∠COA ≅ ∠DOA ≅ এক সমকোণ। প্রমাণ কর যে রশ্মি চারিটি দুইটি সরলরেখা উৎপন্ন করে।

11. প্রমাণ কর যে একটি সরলরেখার কোন বিন্দুতে উহার উভয় পার্শ্বে দুইটি লম্ব টানিলে ঐ লম্ব দুইটি একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

12. $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার O বিন্দুতে উহার দুই বিপরীত পার্শ্বে $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ দুইটি রশ্মি টানা হইল ; $\angle AOX$ ও $\angle BOY$ সর্বসম হইলে প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{OX}$ এবং $\overrightarrow{OY}$ একই সরলরেখায় অবস্থিত।

---

§ 5. **সমান্তরাল সরলরেখা** :—তোমরা পূর্বেই শিখিয়াছ যে একই সমতলে অবস্থিত দুইটি সরলরেখাকে উভয়দিকে বর্ধিত করিলে সরলরেখা দুইটি যদি পরস্পর ছেদ না করে, তবে তাহাদিগকে পরস্পর সমান্তরাল বলে।

ঘরের মেঝের, টেবিলের বা রুলারের বিপরীত দুইটি ধার সমান্তরাল সরলরেখার উদাহরণ। যদি দুইটি সরলরেখা $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ পরস্পর সমান্তরাল হয়, তবে লেখা হয় $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. $\parallel$ চিহ্নটি সমান্তরাল-এর চিহ্ন।

দুইটি রেখাংশ যে দুইটি সরলরেখার অংশ, সেই দুইটি সরলরেখা সমান্তরাল হইলে সরলরেখাংশ দুইটিও সমান্তরাল হইবে।

চিত্রে $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সরল রেখাদ্বয় সমান্তরাল বলিয়া $\overline{PQ}$ ও $\overline{RS}$ রেখাংশ দুইটিও সমান্তরাল।

চিত্র 6

§ 5.1. **অনুরূপ, একান্তর, অন্তঃস্থ ও বহিঃস্থ বা বহিঃকোণ** :—

$\overleftrightarrow{PQ}$ সরলরেখা $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা দুইটিকে ছেদ করিয়াছে। $\overleftrightarrow{PQ}$কে $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা দুইটির ছেদক বলা হয়।

চিত্রে 1 ও 5, 2 ও 6, 3 ও 7 এবং 4 ও 8 কোণগুলিকে পরস্পরের অনুরূপ কোণ বলে।

3 ও 5, 4 ও 6, 1 ও 7 এবং 2 ও 8 কোণগুলিকে পরস্পরের একান্তর কোণ বলে।

3, 4, 5 ও 6 কোণগুলি $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা দুইটির অন্তঃস্থ কোণ।

1, 2, 7 ও 8 কোণগুলি $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা দুইটির বহিঃস্থ কোণ।

চিত্র 7

নিম্নে সমান্তরাল সরলরেখা সম্বন্ধীয় দুইটি স্বতঃসিদ্ধের সত্যতা সক্রিয়তার সাহায্যে পরীক্ষা করা হইতেছে।

স্বতঃসিদ্ধ 3. একটি সরলরেখা অপর দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করিলে যদি দুইটি অনুরূপ কোণ পরস্পর সর্বসম হয়, তবে সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল হইবে।

চিত্র 8

একটি রুলার একটি কাগজের উপর স্থাপন কর। রুলারটির নীচের ধার বরাবর একটি সরলরেখা $\overleftrightarrow{AB}$ অঙ্কন কর এবং উপরের ধারে একটি বিন্দু P লও। এইবার রুলারটি সরাইয়া লও। P বিন্দু দিয়া একটি সরলরেখা $\overleftrightarrow{PQ}$ টান। মনে কর $\overleftrightarrow{PQ}$ $\overleftrightarrow{AB}$কে Q বিন্দুতে

ছেদ করে। $\overleftrightarrow{QP}$কে বর্ধিত কর। বর্ধিত $\overleftrightarrow{QP}$ সরলরেখার উপর P বিন্দুতে $\angle PQB$-র সহিত সর্বসম একটি কোণ $\angle EPD$ অঙ্কন কর। $\overrightarrow{DP}$কে উভয়দিকে বর্ধিত কর। এইবার রুলারটিকে পুনরায় কাগজের উপর এরূপভাবে স্থাপন কর যেন রুলারটির নীচের ধার $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখা বরাবর থাকে। দেখিবে যে, রুলারটির উপরের ধার $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা বরাবর থাকিবে। সুতরাং $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ পরস্পর সমান্তরাল। এখানে $\angle PQB$ ও $\angle EPD$ দুইটি অনুরূপ কোণ এবং উহারা সর্বসম হওয়ায় $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখাদ্বয় সমান্তরাল হইয়াছে।

বিকল্প পদ্ধতি ঃ কাগজের উপর $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{EF}$ দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখা অঙ্কন কর। মনে কর Q উহাদের ছেদবিন্দু।

$\overleftrightarrow{EF}$ সরলরেখার একই দিকে উহার যে কোন P বিন্দুতে $\angle EQB$র সহিত সর্বসম $\angle EPD$ অঙ্কন কর। $\overrightarrow{DP}$কে C পর্যন্ত বর্ধিত কর। [চিত্র ৪]। $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা দুইটির $\overleftrightarrow{EF}$ একটি ভেদক এবং $\angle EPD$ ও $\angle EQB$ অনুরূপ কোণ দুইটি সর্বসম।

এক্ষণে যদি কাগজের সমতলে $\overrightarrow{PQ}$-এর দিকে এবং $|PQ|$ সরণ দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি চলন প্রয়োগ করা হয়, তবে P-র নূতন অবস্থান হইবে Q বিন্দু এবং $\overleftrightarrow{EF}$ সরলরেখার দিক চলনের দিক হওয়ায় $\overline{PQ}$ রেখাংশ $\overleftrightarrow{EF}$ সরলরেখা বরাবর থাকিবে।

এখন কাগজ কাটিয়া একটি পরীক্ষা করা যাক।

পরীক্ষা : কাঁচি দিয়া $\overleftrightarrow{CD}$ বরাবর কাগজের উপরের অংশ কাটিয়া লও এবং ঐ অংশটিকে এরূপে নীচের অংশে স্থাপন কর যেন P বিন্দু Q বিন্দুর উপর এবং $\overrightarrow{PE}$ রশ্মি যেন $\overrightarrow{QE}$ রশ্মির উপর পড়ে। এই স্থাপনকে t চলনের ফল বলা যাইতে পারে।

এখন দেখিবে $\overrightarrow{PD}$ রশ্মি $\overrightarrow{QB}$ রশ্মির উপর অর্থাৎ $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার উপর সমাপতিত হইয়াছে। অতএব t চলনের ফলে $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখার প্রতিবিম্ব হইল $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখা। এক্ষণে, যেহেতু চলনের ফলে কোন সরলরেখার প্রতিবিম্ব একটি সমান্তরাল সরলরেখা হয়, সেজন্য $\overleftrightarrow{CD}$ ও $\overleftrightarrow{AB}$ পরস্পর সমান্তরাল।

অতএব স্বতঃসিদ্ধটি প্রমাণিত হইল।

[কর্তিত অংশ] [কর্তিত অংশ $\overrightarrow{QB}$ রশ্মির উপর স্থাপনের পরের অবস্থা।]

স্বতঃসিদ্ধ 4. দুইটি পরস্পর ছেদী সরলরেখা উভয়ই অপর একটি সরলরেখার সমান্তরাল হইতে পারে না। ইহাকে Playfair-এর স্বতঃসিদ্ধ বলে।

মনে কর $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ দুইটি পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখা। $\overleftrightarrow{AB}$কে ছেদ করিয়াছে এরূপ একটি সরলরেখা l লও। lকে বর্ধিত কর। দেখিবে l, $\overleftrightarrow{CD}$কে ছেদ করে। সুতরাং l, $\overleftrightarrow{CD}$-র সমান্তরাল নহে। $\overleftrightarrow{AB}$কে ছেদ করে এরূপ কয়েকটি সরলরেখা লইয়া সক্রিয়তাটির আরও কয়েকবার পুনরাবৃত্তি কর। দেখিবে যে, সকল ক্ষেত্রেই সরলরেখাগুলি $\overleftrightarrow{CD}$কে ছেদ করে।

চিত্র 9

§ 6. **ত্রিভুজের সর্বসমতা** :—প্রত্যেকটি ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গ বা অংশ—তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ। যদি একটি ত্রিভুজের অংশ ছয়টি অপর একটি ত্রিভুজের অনুরূপ অংশগুলির সহিত সর্বসম হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটিকে সর্বসম বলে।

সুতরাং কোন ত্রিভুজকে অপর একটি ত্রিভুজের উপর স্থাপন করিলে যদি ত্রিভুজ দুইটি সমাপতিত হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে এবং ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফলও সমান হইবে।

§ 7. **অনুরূপ বাহু ও অনুরূপ কোণ** :—যদি একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির সহিত অপর একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির একটি সম্পর্ক কল্পনা করা যায়, তবে সম্পর্কযুক্ত শীর্ষবিন্দুগুলির সংযোজক বাহুগুলিকে অনুরূপ বাহু এবং সম্পর্কযুক্ত শীর্ষবিন্দুস্থ কোণগুলিকে অনুরূপ কোণ বলা হয়।

ABC ও DEF ত্রিভুজে যদি $A \rightarrow D$, $B \rightarrow E$, $C \rightarrow F$ হয় তবে, $\overline{AB}$ ও $\overline{DE}$, $\overline{BC}$ ও $\overline{EF}$, $\overline{CA}$ ও $\overline{FD}$ অনুরূপ বাহু এবং

$\angle$ABC ও $\angle$DEF, $\angle$BCA ও $\angle$EFD এবং $\angle$CAB ও $\angle$FAD অনুরূপ কোণ। নিম্নে দুইটি ত্রিভুজের সর্বসমতা বিষয়ক দুইটি স্বতঃসিদ্ধের সত্যতা সক্রিয়তার সাহায্যে প্রমাণ করা হইতেছে।

স্বতঃসিদ্ধ 5. যদি একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের অনুরূপ দুইটি বাহুর সহিত সর্বসম হয় এবং ঐ বাহু দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয় সর্বসম হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

[দ্রষ্টব্য : স্বতঃসিদ্ধ 5কে দুইটি ত্রিভুজের সর্বসমতার বাহু-কোণ-বাহু (SAS) শর্ত বলে। SAS-এর অর্থ বাহু (side), কোণ (angle), বাহু (side). স্বতঃসিদ্ধ 6কে কোণ-কোণ-বাহু (AAS) শর্ত বলে।]

স্বতঃসিদ্ধ 5-এর সত্যতা পরীক্ষা :—

মনে কর ABC একটি প্রদত্ত ত্রিভুজ।

$\overline{AB}$ সরলরেখাংশের সহিত সর্বসম একটি সরলরেখাংশ $\overline{DE}$ লও।

চিত্র 10

D বিন্দুতে BAC কোণের সহিত সর্বসম EDX কোণটি অঙ্কন কর। $\overrightarrow{DX}$ বাহু হইতে $\overline{AC}$ রেখাংশের সহিত সর্বসম $\overline{DF}$ রেখাংশ কাটিয়া লও। EF যোগ কর। DEF একটি ত্রিভুজ হইল। চাঁদা দ্বারা DEF ও DFE কোণ দুইটির পরিমাণ নির্ণয় কর।

দেখিবে যে, $\angle DEF \cong \angle ABC$ এবং $\angle DFE \cong \angle ACB$.
আবার ডিভাইডার দ্বারা দেখ যে $\overline{BC} \cong \overline{EF}$.

এক্ষণে যদি ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে একটি সম্পর্ক কল্পনা করা যায় যে, $A \rightarrow D$, $B \rightarrow E$, $C \rightarrow F$, তবে ABC ত্রিভুজের ছয়টি অংশের প্রত্যেকটি অংশ DEF ত্রিভুজের অনুরূপ অংশটির সহিত সমান হইবে। সুতরাং ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

অঙ্কন দ্বারা ত্রিভুজ দুইটির একটির দুইটি বাহুকে যথাক্রমে অন্যটির অনুরূপ বাহু দুইটির সহিত এবং বাহু দুইটির অন্তর্ভূত কোণদ্বয় সর্বসম করিয়া দেখা গেল ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইতেছে। সুতরাং স্বতঃসিদ্ধটির সত্যতা নির্ণীত হইল।

বিকল্প প্রণালী : একটি কাগজের উপর এরূপ যে কোন দুইটি ত্রিভুজ ABC ও DEF লও যেন $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ এবং $\angle BAC \cong \angle EDF$ হয়। DEF ত্রিভুজটিকে কাটিয়া ABC ত্রিভুজের উপর এরূপে স্থাপন কর যে, E বিন্দু যেন B বিন্দুর উপর এবং $\overline{EF}$ বাহু যেন $\overline{BC}$ বাহুর উপর পড়ে। দেখিবে যে ত্রিভুজ দুইটি সমাপতিত হইতেছে। সুতরাং ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

স্বতঃসিদ্ধ 6. যদি একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণের সহিত সর্বসম হয় এবং প্রথমটির একটি বাহু অপরটির অনুরূপ বাহুর সহিত সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

স্বতঃসিদ্ধ 5এর ন্যায় অঙ্কন অথবা কাগজ কাটিয়া স্বতঃসিদ্ধ 6এর সত্যতাও প্রমাণ করা যাইবে। ছাত্রদের এই স্বতঃসিদ্ধটি পরীক্ষা করিয়া দেখিতে বলা হইতেছে। উহা তাহাদের একটি অনুশীলনী হিসাবে দেওয়া হইল।

[দ্রষ্টব্য : ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটির শীর্ষবিন্দুগুলির সম্পর্ক বলিতে A→D, B→E, C→F সম্পর্ক বুঝাইবে। A→E, B→F, C→D সম্পর্ককে ABC ও EFD ত্রিভুজদ্বয়ে শীর্ষবিন্দুগুলির সম্পর্ক বলা হইবে। এইক্ষেত্রে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইলে ABC ও EFD ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম বলা হইবে এবং 'ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম' বিবৃতিটি অশুদ্ধ হইবে।]

বিবিধ উদাহরণ 2

উদা. 1. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমিকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [C. U.]

ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\overline{AD}$ রেখা $\angle BAC$কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া $\overline{BC}$ ভূমিকে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $\overline{BD} \cong \overline{DC}$ এবং $\overline{AD}$ রেখা $\overline{BC}$-র উপর লম্ব।

প্রমাণ। $\triangle ABD$ ও $\triangle ACD$এর $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\overline{AD}$ সাধারণ বাহু এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle BAD \cong$ অন্তর্ভুক্ত $\angle CAD$,

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ $\overline{BD} \cong \overline{DC}$ এবং $\angle ADB \cong \angle ADC$, কিন্তু ইহারা সন্নিহিত কোণ বলিয়া প্রত্যেকে এক সমকোণ। ∴ $\overline{AD}$ রেখা $\overline{BC}$-র উপর লম্ব।

চিত্র 11

উদা. 2. ABCDEF একটি সুষম ষড়্‌ভুজ। প্রমাণ কর যে, ACE একটি সমবাহু ত্রিভুজ। [C. U. 1911]

ABCDEF একটি সুষম ষড়্‌ভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে $\triangle ACE$ সমবাহু।

AC, AE ও CE যোগ কর।

চিত্র 12

প্রমাণ। $\triangle ABC$ ও $\triangle AFE$-র $\overline{AB} \cong \overline{AF}$, $\overline{BC} \cong \overline{FE}$

এবং $\angle ABC \cong \angle AFE$

($\because$ সুষম ষড়্‌ভুজের সব বাহু ও কোণই সমান),

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। $\therefore$ $\overline{AC} \cong \overline{AE}$.

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে $\triangle ABC \cong \triangle CDE$,

$\therefore$ $\overline{AC} \cong \overline{CE}$.

$\therefore$ $\overline{AE} \cong \overline{AC} \cong \overline{CE}$, $\therefore$ ACE একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

উদা. 3. একটি কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু ঐ কোণের বাহু দুইটি হইতে সমদূরবর্তী। [D. B. '35]

মনে কর, $\angle BAC$র সমদ্বিখণ্ডক $\overrightarrow{AD}$র উপর O যে-কোন একটি বিন্দু। O হইতে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$র উপর যথাক্রমে $\overline{OE}$ ও $\overline{OF}$ লম্ব টান। প্রমাণ করিতে হইবে যে $\overline{OE} \cong \overline{OF}$.

প্রমাণ। $\triangle OEA$ ও $\triangle OFA$র

$\angle OAE \cong \angle OAF$ (স্বীকার),

$\angle OEA \cong \angle OFA$ (সমকোণ)

এবং $\overline{OA}$ বাহু সাধারণ,

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম [স্বতঃ (উপ.)]।

$\overline{OE} \cong \overline{OF}$.

চিত্র 13

উদা. 4. ABCD চতুর্ভুজের $\overline{AC}$ কর্ণ যদি ∠BAD ও ∠BCDকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে প্রমাণ কর যে, $\overline{BD}$কে $\overline{AC}$ সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে। [C. U. '48]

[Hints : মনে কর $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ কর্ণকে O বিন্দুতে ছেদ করিল। △ABC ও △ADCর ∠BAC ≅∠DAC, ∠BCA≅∠DCA এবং $\overline{AC}$ বাহু সাধারণ, ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ $\overline{AB}$≅$\overline{AD}$.

চিত্র 14

আবার, △ABO ও △ADOর $\overline{AB}$≅$\overline{AD}$, $\overline{AO}$ বাহু সাধারণ এবং ∠BAO≅∠DAO,

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ $\overline{BO}$≅$\overline{DO}$ এবং ∠AOB≅∠AOD, ইহারা সন্নিহিত সরল কোণ বলিয়া প্রত্যেকটি এক সমকোণ। ∴ $\overline{AC}$, $\overline{BD}$কে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করিল।]

প্রশ্নমালা 2

1. কোন ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

2. কোন বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় সমান।

3. চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটি পরস্পর সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত হইলে চতুর্ভুজটি সমবাহু হইবে।

4. ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর লম্বসমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের ছেদবিন্দু উহার কৌণিক বিন্দুগুলি হইতে সমদূরবর্তী।

5. একটি ত্রিভুজের যে কোন দুই কোণ ও তৎসংলগ্ন বাহু অপর একটি ত্রিভুজের দুই কোণ ও তৎসংলগ্ন বাহুর সমান হইলে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইবে।

6. কোন ত্রিভুজের শিরঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমির উপর লম্ব হইলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

7. ABCD চতুর্ভুজের $\overline{BD}$ কর্ণ ABC ও ADC কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক। প্রমাণ কর যে, $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ কর্ণকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

---

§ 8. বৃত্তসম্পর্কীয় স্বতঃসিদ্ধ :

স্বতঃসিদ্ধ 7. দুইটি সর্বসম বৃত্তের (অথবা একই বৃত্তের) বিভিন্ন সর্বসম জ্যা বৃত্তের সমান সমান চাপ ছেদ করে এবং কেন্দ্রে পরস্পর সর্বসম কোণ উৎপন্ন করে। বিপরীতক্রমে দুইটি সর্বসম বৃত্তের (অথবা একই বৃত্তের) বিভিন্ন জ্যা সমান সমান চাপ ছেদ করিলে অথবা কেন্দ্রে পরস্পর সর্বসম কোণ উৎপন্ন করিলে জ্যাগুলি পরস্পর সর্বসম হইবে।

চিত্র 15

O এবং O′ কেন্দ্রবিশিষ্ট দুইটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ r. সুতরাং বৃত্ত দুইটি সমান। বৃত্ত দুইটির পরিধি বরাবর দুইটি সূতা ফেলিয়া পরিধি

দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। দেখিবে পরিধি দুইটির দৈর্ঘ্য সমান। বৃত্ত দুইটির পরস্পর সর্বসম $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ ও $\overline{EF}$ তিনটি জ্যা অঙ্কন কর। জ্যাগুলি AXB, CYD ও EZF উপচাপ তিনটি উৎপন্ন করিল। এই উপচাপগুলি বরাবর সূতা ফেলিয়া উহাদের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিয়া দেখ, দৈর্ঘ্যগুলি সমান। এখানে অধিচাপের দৈর্ঘ্য = পরিধির দৈর্ঘ্য − উপচাপের দৈর্ঘ্য। অতএব অধিচাপগুলির দৈর্ঘ্যগুলিও সমান। সুতরাং দেখা গেল যে সর্বসম জ্যাগুলি সমান বৃত্ত দুইটির সমান দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট চাপ ছেদ করে।

এক্ষণে, AO, BO, CO, DO, EO′ ও FO′ যোগ কর।

চাঁদা দ্বারা ∠AOB, ∠COD ও ∠EO′Fএর পরিমাপ নির্ণয় কর। দেখিবে যে পরিমাপগুলি সমান। সুতরাং কোণ তিনটি পরস্পর সর্বসম। সুতরাং পরীক্ষাদ্বারা প্রমাণিত হইল যে, সমান সমান বৃত্তের অথবা একই বৃত্তের পরস্পর সর্বসম বিভিন্ন জ্যা বৃত্তগুলির কেন্দ্রে পরস্পর সর্বসম কোণ উৎপন্ন করে।

কাগজ কাটিয়া প্রমাণ : একটি কাগজে চিত্র 15 আঁকিয়া কাঁচি দিয়া OCYD অংশ কাটিয়া লও এবং উহাকে OAXB অংশের উপর একই দিকে এরূপে স্থাপন কর যেন $\overline{CD}$ জ্যা $\overline{AB}$-র সহিত সমাপতিত হয়। দেখিবে ঐ অংশদ্বয় সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া গিয়াছে। অতএব চাপ AXB ও চাপ CYD এবং ∠AOB ও ∠COD সর্বসম। অনুরূপে কর্তিত অংশ O′FZEএর উপর স্থাপন করিয়াও ইহা প্রমাণিত হয়।

বিপরীত বক্তব্যটির সত্যতা প্রমাণের জন্য O_1 এবং O_2 কেন্দ্র-বিশিষ্ট একই ব্যাসার্ধের দুইটি বৃত্ত লও এবং কেন্দ্রে PO_1Q,

RO_1S ও LO_2M তিনটি পরস্পর সর্বসম কোণ অঙ্কন কর। দৈর্ঘ্য

চিত্র 16

মাপনীর সাহায্যে $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$ ও $\overline{LM}$ জ্যাগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিলে দেখিবে যে জ্যাগুলি পরস্পর সর্বসম।

আবার, সূতার সাহায্যে বৃত্ত দুইটির কয়েকটি সমান চাপ কাটিয়া লইয়া দেখিতে পার যে চাপগুলি পরস্পর সর্বসম জ্যা উৎপন্ন করে।

পূর্বের ন্যায় কাগজ কাটিয়া তোমরা এই সত্যতা পরীক্ষা কর।

তৃতীয় অধ্যায়

উপপাদ্য

§ 9. **বিপ্রতীপ কোণ :** তোমরা শিখিয়াছ যে দুইটি সমবিন্দু রশ্মি একটি এবং একটিমাত্র কোণ উৎপন্ন করে। যদি রশ্মি দুইটিকে বিপরীত দিকে বর্ধিত করা হয়, তবে একটির পরিবর্তে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয়। অর্থাৎ দুইটি সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয়। চিত্রে $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা দুইটি O বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে।

চিত্র 17

AOC, COB, BOD ও DOA কোণ চারিটি উৎপন্ন হইল।

$\angle AOD$ ও $\angle BOC$কে এবং $\angle BOD$ ও $\angle AOC$কে পরস্পর বিপ্রতীপ কোণ বলে।

উপপাদ্য 1

দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে বিপ্রতীপ কোণগুলি পরস্পর সর্বসম হইবে।

$\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ দুইটি সরলরেখা O বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle AOC \cong \angle BOD$,

এবং $\angle AOD \cong \angle BOC$. [চিত্র 17 অঙ্কন কর।]

প্রমাণ। $\overleftrightarrow{AO}$ সরলরেখা $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখার সহিত O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে,

$\therefore \angle AOC + \angle AOD = 2$ সমকোণ [স্বতঃ উপ. 1]

আবার, $\overrightarrow{DO}$ সরলরেখা $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার সহিত O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে, $\therefore \angle AOD + \angle BOD = 2$ সমকোণ

[স্বতঃ. উপ. 1]

$\therefore \quad \angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$ [স্বতঃ (i)]

এই দুই সমান বস্তু হইতে $\angle AOD$ বিয়োগ করিলে

অবশিষ্ট $\angle AOC \cong$ অবশিষ্ট $\angle BOD$ [স্বতঃ (ii)]

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, $\angle AOD \cong \angle BOC$.

বিকল্প প্রমাণ :—

[নূতন পাঠ্যক্রমে সপ্তম শ্রেণীতে **প্রতিফলন, চলন, আবর্তন** প্রভৃতি রূপান্তর ও তাহাদের ধর্ম সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে। তাহাদের সাহায্যে বিভিন্ন জ্যামিতিক উপপাদ্যের প্রমাণ সম্ভব। এই পুস্তকে ঐ ধর্মগুলির সাহায্যে কয়েকটি উপপাদ্যের বিকল্প (অর্থাৎ অন্য পদ্ধতিতে) প্রমাণ দেওয়া হইল।]

মনে কর, $\overrightarrow{OD}$ ও $\overrightarrow{OB}$ রশ্মি দুইটির প্রতিসাম্য রেখা $\overleftrightarrow{PQ}$ এবং $\overrightarrow{OD}$ ও $\overrightarrow{OA}$ রশ্মি দুইটির প্রতিসাম্য রেখা $\overleftrightarrow{RS}$। সুতরাং $\overleftrightarrow{PQ}$ সরলরেখায় প্রতিফলনের ফলে $\overrightarrow{OB}$-র প্রতিবিম্ব $\overrightarrow{OD}$. আবার $\overleftrightarrow{RS}$ সরলরেখায় প্রতিফলনের ফলে $\overrightarrow{OD}$-র প্রতিবিম্বটি $\overrightarrow{OA}$. অতএব $\overleftrightarrow{PQ}$ ও $\overleftrightarrow{RS}$ সরলরেখা দুইটিতে পর পর প্রতিফলনের ফলে $\overrightarrow{OB}$র প্রতিবিম্ব হইল $\overrightarrow{OA}$.

চিত্র 18

অনুরূপে $\overleftrightarrow{PQ}$ ও $\overleftrightarrow{RS}$ সরলরেখা দুইটিতে পর পর প্রতিফলনের ফলে $\overrightarrow{OD}$-র প্রতিবিম্ব হইবে $\overrightarrow{OC}$.

∴ $\angle BOD$র প্রতিবিম্ব হইবে $\angle AOC$.

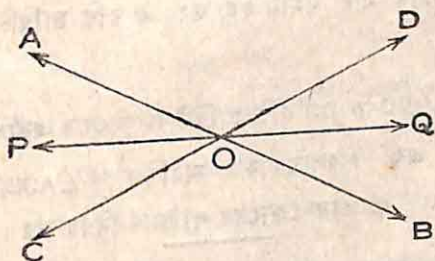
এক্ষণে তোমরা জান প্রতিফলনের ফলে কোণের প্রতিবিম্ব একটি সর্বসম কোণ হয়। সুতরাং $\angle BOD \cong \angle AOC$.

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, $\angle AOD \cong \angle BOC$.

বিবিধ উদাহরণ 3

উদা. 1. দুইটি বিপ্রতীপ কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত।

$\overrightarrow{OP}$ এবং $\overrightarrow{OQ}$ যথাক্রমে AOC এবং BOD বিপ্রতীপকোণ দুইটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে $\overrightarrow{OP}$ এবং $\overrightarrow{OQ}$ একই সরলরেখায় অবস্থিত।

প্রমাণ: $\angle AOP \cong \angle COP$, $\angle AOD \cong$ বিপ্রতীপ $\angle BOC$ এবং $\angle DOQ \cong \angle BOQ$.

চিত্র 19

∴ $\angle AOP + \angle AOD + \angle DOQ = \angle POC + \angle BOC + \angle BOQ =$ চার সমকোণের অর্ধেক (কারণ, O বিন্দুস্থ কোণগুলির সমষ্টি 4 সমকোণ) = 2 সমকোণ।

∴ POQ কোণ একটি সরলকোণ।

∴ $\overrightarrow{OP}$ এবং $\overrightarrow{OQ}$ একই সরলরেখায় অবস্থিত।

উদা. 2. $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা দুইটি পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে ∠AOCএর সমদ্বিখণ্ডককে O বিন্দু দিয়া বর্ধিত করিলে উহা ∠BODকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

মনে কর $\overline{PO}$, ∠AOCকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে এবং উহাকে Q পর্যন্ত বর্ধিত করা হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে $\overrightarrow{OQ}$ রেখা ∠BOD-এর সমদ্বিখণ্ডক।

প্রমাণ। ∠AOP≅বিপ্রতীপ ∠BOQ

এবং ∠POC≅বিপ্রতীপ ∠DOQ.

এখন ∵ ∠AOP≅∠POC, ∴ ∠BOQ≅∠DOQ.

∴ $\overrightarrow{OQ}$, BOD কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

প্রশ্নমালা 3

1. উপপাদ্য 1এর ∠AOD=120° হইলে অপর কোণ তিনটির পরিমাণ কত?

2. চারিটি রশ্মি একটি বিন্দুতে মিলিত হইলে উৎপন্ন কোণ চারিটির দুই দুইটি বিপরীত কোণ যদি সমান হয়, তবে ঐ রশ্মি চারিটি দুইটি সরলরেখায় পরিণত হইবে।

3. $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{CO}$ ও $\overrightarrow{DO}$ রশ্মি চারিটি O বিন্দুতে এরূপে মিলিত হইয়াছে যে $\overrightarrow{AO}$ ও $\overrightarrow{CO}$ এক সরলরেখায় অবস্থিত, ∠AOB≅∠COD এবং ∠AOB=$\frac{1}{3}$∠BOC ; প্রত্যেক কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

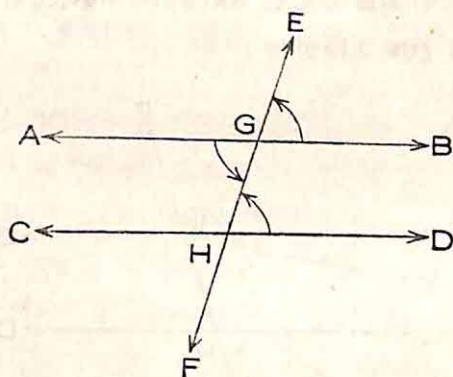
§ 10. সমান্তরাল সরলরেখা সম্বন্ধীয় উপপাদ্য

উপপাদ্য 2

একটি সরলরেখা অপর দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করিলে যদি (1) দুইটি একান্তর কোণ সমান হয়, অথবা (2) ছেদকের একই পার্শ্বে অবস্থিত অন্তঃকোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণ হয়, তবে শেষোক্ত সরলরেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

$\overleftrightarrow{EF}$ সরলরেখা $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা দুইটিকে যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

যদি (1) $\angle AGH \cong$ একান্তর $\angle GHD$ হয়, অথবা যদি

(2) $\angle BGH + \angle GHD = 2$ সমকোণ হয়, তবে প্রমাণ করিতে হইবে যে $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ পরস্পর সমান্তরাল।

চিত্র 20

(1) **প্রমাণ।** $\angle AGH \cong$ বিপ্রতীপ $\angle EGB$ (উপ. 1)

কিন্তু $\angle AGH \cong \angle GHD$ (স্বীকার),

$\therefore$ $\angle EGB \cong \angle GHD$ এবং ইহারা অনুরূপ কোণ,

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সমান্তরাল [স্বতঃ উপ. 3]

(2) **প্রমাণ।** $\angle BGH + \angle EGB = 2$ সমকোণ [স্বতঃ. 1]

আবার, $\angle BGH + \angle GHD = 2$ সমকোণ (স্বীকার)

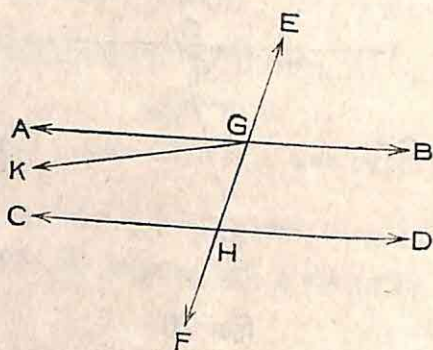
$\therefore$ $\angle BGH + \angle EGB = \angle BGH + \angle GHD$,

$\therefore$ $\angle EGB \cong \angle GHD$ (স্বতঃ ii), ইহারা অনুরূপ কোণ,

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সমান্তরাল।

উপপাদ্য 3

একটি সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করিলে (1) একান্তর কোণ দুইটি পরস্পর সমান হইবে, (2) অনুরূপ কোণ দুইটি পরস্পর সমান হইবে, এবং (3) ছেদকের এক পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণ হইবে।

$\overleftrightarrow{EF}$ সরলরেখা $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়কে যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

চিত্র 21

(1) প্রমাণ করিতে হইবে যে ∠AGH≅একান্তর ∠GHD.

প্রমাণ। যদি ∠AGH ও ∠GHD সমান না হয়, তবে মনে কর KGH কোণ GHD কোণের সমান ও একান্তর।

এক্ষণে, ∵ ∠KGH≅একান্তর ∠GHD,

∴ $\overleftrightarrow{KG}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সমান্তরাল (উপ. 2),

কিন্তু $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সমান্তরাল (স্বীকার),

∴ $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{KG}$ দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখা $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখার সমান্তরাল হইতেছে,

কিন্তু প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ অনুসারে তাহা অসম্ভব।

∴ ∠AGH ও ∠GHD অসমান হইতে পারে না।

∴ ∠AGH≅একান্তর ∠GHD.

(2) প্রমাণ করিতে হইবে যে, ∠EGB≅অনুরূপ ∠GHD.

প্রমাণ। ∠EGB≅বিপ্রতীপ ∠AGH,

আবার, ∠AGH≅∠GHD [প্রমাণিত]

∴ ∠EGB≅∠GHD.

(3) প্রমাণ করিতে হইবে যে, ∠BGH+∠GHD =2 সমকোণ।

প্রমাণ। ∠BGH+∠AGH=2 সমকোণ [স্বতঃ উপ. 1.]

কিন্তু ∠AGH≅একান্তর ∠GHD [প্রমাণিত]

∴ ∠BGH+∠GHD=2 সমকোণ।

দ্রষ্টব্য। উপপাদ্য 3এর উপরের প্রমাণের দ্বিতীয় অংশ, প্রথম অংশের সাহায্যে প্রমাণ করা হইয়াছে। নীচে উপপাদ্য 3এর প্রথম ও দ্বিতীয় অংশের বিকল্প প্রমাণ (অর্থাৎ অন্য প্রকারে প্রমাণ) দেওয়া হইল। এই প্রমাণে দ্বিতীয় অংশ প্রথম অংশের সাহায্য ভিন্ন এবং প্রথম অংশ দ্বিতীয় অংশের সাহায্যে প্রমাণ করা হইয়াছে। এই প্রমাণে সপ্তম শ্রেণীর (নূতন) পাঠ্যক্রমে আলোচিত চলনের সাহায্য গ্রহণ করা হইল।

বিকল্প প্রমাণ

একটি সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করিলে (1) অনুরূপ কোণ দুইটি পরস্পর সমান হইবে, (2) একান্তর কোণ দুইটি পরস্পর সমান হইবে।

প্রমাণ। (1) ∠EHD একটি দিকস্থিতিযুক্ত কোণ।

$\overleftrightarrow{BA}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$-র সমতলে এরূপ একটি চলন প্রয়োগ কর যেন, H বিন্দুর প্রতিবিম্ব G বিন্দু হয়। যেহেতু চলনের দ্বারা কোন

সরলরেখার প্রতিবিম্ব একটি সমান্তরাল সরলরেখা হয়, সেজন্য $\overleftrightarrow{HD}$-র প্রতিবিম্ব $\overleftrightarrow{GB}$ সরলরেখা হইবে (কারণ, $\overleftrightarrow{HD}$ ও $\overleftrightarrow{GB}$ সমান্তরাল)

$\overrightarrow{HG}$ রশ্মির প্রতিবিম্ব $\overrightarrow{GE}$ রশ্মি হইবে। সুতরাং $\angle DHG$এর প্রতিবিম্ব $\angle BGE$ হইবে। কিন্তু চলনের ফলে প্রত্যেক কোণের প্রতিবিম্ব একটি সর্বসম কোণ হয় ; অতএব, $\angle DHG$ ও $\angle BGE$ সর্বসম হইবে অর্থাৎ $\angle DHG \cong \angle BGE$.

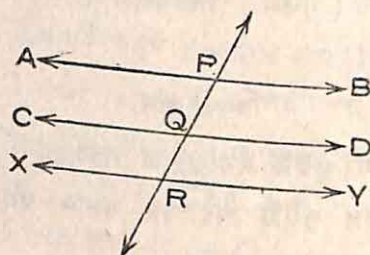
(2) $\angle AGH \cong \angle EGB$ (বিপ্রতীপ কোণ, উপপাদ্য 1)

এবং $\angle EGB \cong \angle GHD$ [উপরের (1)-এর সাহায্যে]

$\therefore$ $\angle AGH \cong$একান্তর $\angle GHD$.

বিবিধ উদাহরণ 4

উদা. 1. একই সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখাগুলি পরস্পর সমান্তরাল।

মনে কর, $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখার প্রত্যেকটি $\overleftrightarrow{XY}$ সরলরেখার সমান্তরাল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

চিত্র নং 22

প্রমাণ। যদি $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সমান্তরাল না হয়, তবে উহাদিগকে বর্ধিত করিলে কোন একদিকে পরস্পর ছেদ করিবে। অতএব,

$\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখা উভয়েই $\overleftrightarrow{XY}$ সরলরেখার সমান্তরাল হইবে ; কিন্তু প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ অনুসারে তাহা হইতে পারে না।

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ পরস্পর সমান্তরাল।

বিকল্প প্রমাণ

$\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখার প্রত্যেকটি $\overleftrightarrow{XY}$এর সমান্তরাল।

প্রমাণ করিতে হইবে $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

প্রমাণ। মনে কর, একটি ভেদক $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ ও $\overleftrightarrow{XY}$কে যথাক্রমে P, Q ও R বিন্দুতে ছেদ করিল।

$\because$ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{XY}$, $\therefore$ $\angle APQ \cong$একান্তর $\angle QRY$ (উপ. 3)

আবার, $\because$ $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{XY}$, $\therefore$ $\angle PQD \cong$অনুরূপ$\angle QRY$ (উপ. 3)

$\therefore$ $\angle APQ \cong \angle PQD$ এবং ইহারা একান্তর কোণ,

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (উপ. 2)।

উদা. 2. একই সরলরেখার উপর লম্বদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।
[C. U. '17 ; D. B. '48]

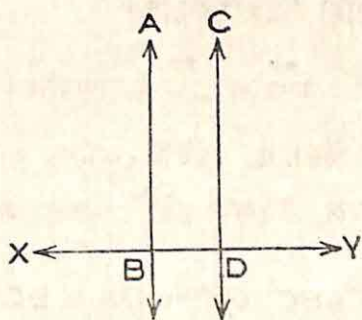
$\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ উভয়েই $\overleftrightarrow{XY}$-এর উপর লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

প্রমাণ। $\because$ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{XY}$,

$\therefore$ $\angle ABX = 1$ সমকোণ,

অনুরূপে, $\angle CDX = 1$ সমকোণ।

চিত্র নং 23

$\therefore$ $\angle ABX \cong \angle CDX$ এবং ইহারা অনুরূপ কোণ।

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

উদা. 3. দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার সহিত কোন ভেদক একই পার্শ্বে যে দুইটি অনুরূপ কোণ উৎপন্ন করে তাহাদের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি সমান্তরাল।

$\overleftrightarrow{EG}$ রেখা $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ এই দুই সমান্তরাল রেখাকে যথাক্রমে F ও G বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং EFB ও FGD এই দুইটি অনুরূপ কোণ যথাক্রমে $\overleftrightarrow{FP}$ ও $\overleftrightarrow{GQ}$ দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে $\overleftrightarrow{FP} \parallel \overleftrightarrow{GQ}$.

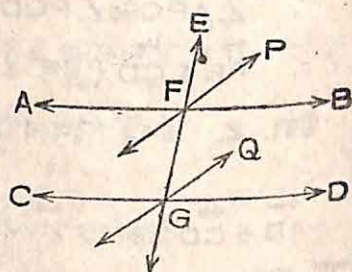
প্রমাণ। $\because$ $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সমান্তরাল এবং $\overleftrightarrow{EG}$ উহাদের ভেদক,

$\therefore$ $\angle EFB \cong$ অনুরূপ $\angle FGD$.

আবার, $\angle EFP = \frac{1}{2} \angle EFB$

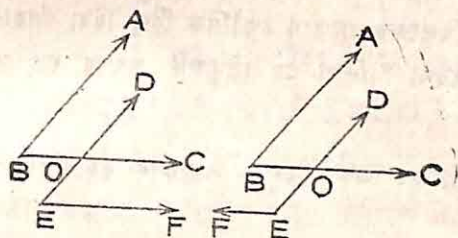
এবং $\angle FGQ = \frac{1}{2} \angle FGD$.

$\therefore$ $\angle EFP \cong \angle FGQ$ এবং ইহারা অনুরূপ কোণ।

$\therefore$ $\overleftrightarrow{FG}$ ও $\overleftrightarrow{GQ}$ সমান্তরাল।

চিত্র নং 24

উদা. 4. দুইটি কোণের বাহুদ্বয় যথাক্রমে পরস্পর সমান্তরাল হইলে, ঐ কোণ দুইটি পরস্পর সমান অথবা সম্পূরক হইবে।

ABC কোণের $\overrightarrow{BA}$ ও $\overrightarrow{BC}$ বাহু যথাক্রমে DEF কোণের $\overrightarrow{ED}$ ও $\overrightarrow{EF}$ বাহুর সহিত সমান্তরাল। প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$\angle B \cong \angle E$ (প্রথম চিত্র), অথবা $\angle B$ ও $\angle E$ সম্পূরক কোণ (দ্বিতীয় চিত্র)।

চিত্র 25

প্রমাণ। $\because \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DE}$, $\therefore \angle DOC \cong$ অনুরূপ $\angle ABC$.

আবার, $\because \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{EF}$, $\therefore \angle DOC \cong$ অনুরূপ $\angle DEF$,

$\therefore \angle ABC \cong \angle DEF$.

[দ্বিতীয় চিত্রে] $\because \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{EF}$, $\therefore \angle DOB \cong \angle DEF$

(অনুরূপ কোণ)।

আবার $\because \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DE}$ এবং $\overrightarrow{BC}$ উহাদের ভেদক,

$\therefore \angle B + \angle DOB = 2$ সমকোণ।

অতএব, $\angle B + \angle E = 2$ সমকোণ অর্থাৎ উহারা সম্পূরক কোণ।

প্রশ্নমালা 4

1. ত্রিভুজের একটি বাহুর যে কোন বিন্দু হইতে অপর একটি বাহুর সমান্তরাল রেখা টানিলে যে ত্রিভুজটি উৎপন্ন হয় তাহা প্রদত্ত ত্রিভুজের সহিত সদৃশকোণী হইবে।

2. যদি ABCD সামান্তরিকের $\overline{AC}$ কর্ণ $\angle A$কে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে উহা C কোণকেও সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

3. কতিপয় সমান্তরাল সরলরেখার কোন ভেদক যদি উহাদের একটির উপর লম্ব হয়, তবে উহা অপরগুলির উপরও লম্ব হইবে।

4. দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখার প্রত্যেকটির উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটি পরস্পর সমান্তরাল হইতে পারে না।

5. একটি ত্রিভুজের প্রত্যেক কৌণিক বিন্দু দিয়া তাহার বিপরীত বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা টানিলে যে ত্রিভুজটি উৎপন্ন হয়, তাহা মূল ত্রিভুজের সহিত সদৃশকোণী।

6. সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ হইলে, উহার সকল কোণই সমকোণ হইবে।

7. যদি একটি ত্রিভুজের বাহুত্রয় যথাক্রমে অন্য ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের সমান্তরাল হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী হইবে। [C. U. '32]

8. দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা ও উহাদের একটি ছেদকের অন্তর্ভূত কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকগুলি একটি আয়তক্ষেত্র উৎপন্ন করে।

---

§ 11. ত্রিভুজ ও বহুভুজের কোণ-পরিমাণ।

উপপাদ্য 4

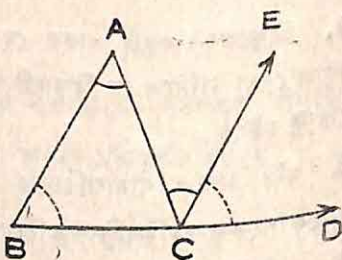
ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।

ABC একটি ত্রিভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB$ $= 2$ সমকোণ।

চিত্র 26

অঙ্কন। $\overline{BC}$ বাহুকে D বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর, এবং C বিন্দু হইতে $\overline{BA}$ বাহুর সমান্তরাল $\overrightarrow{CE}$ সরলরেখা টান।

প্রমাণ। ∵ $\overline{BA} \parallel \overrightarrow{CE}$ এবং $\overline{AC}$ ইহাদিগকে ছেদ করিয়াছে,

∴ $\angle CAB \cong$ একান্তর $\angle ACE$ [উপ. 3]

আবার, ∵ $\overline{BA} \parallel \overrightarrow{CE}$ এবং $\overrightarrow{BD}$ উহাদিগকে ছেদ করিয়াছে,

∴ $\angle ABC \cong$ অনুরূপ কোণ $\angle ECD$ [উপ. 3]

অতএব, $\angle ABC + \angle CAB = \angle ACE + \angle ECD = \angle ACD$.

এই দুই সমান বস্তুতে $\angle BCA$ যোগ করিলে পাওয়া যায়,

$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = \angle ACD + \angle BCA$

$= 2$ সমকোণ [স্বতঃ উপ. 1]

∴ $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 2$ সমকোণ।

[**দ্রষ্টব্য**। ABC ত্রিভুজের A বিন্দু দিয়া $\overline{BC}$ বাহুর সমান্তরাল রেখা টানিয়া ঐ উপপাদ্যটি প্রমাণ কর।]

অনুসিদ্ধান্ত 1. একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণের সমান হইলে, উহাদের তৃতীয় কোণ দুইটিও পরস্পর সমান হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 2. সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ দুইটি পূরককোণ।

অনুসিদ্ধান্ত 3. কোন চতুর্ভুজের চারিটি কোণের সমষ্টি চারি সমকোণ।

যে কোন চতুর্ভুজের একটি কর্ণ টানিলে উহা দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত হয়। চতুর্ভুজের কোণ চারিটি ঐ দুই ত্রিভুজের ছয়টি কোণের সমষ্টি বলিয়া ঐ কোণ চারিটির পরিমাণ চারি সমকোণ হইবে।

বিবিধ উদাহরণ 5

উদা. 1. কোন ত্রিভুজের একটি কোণ অপর কোণদ্বয়ের সমষ্টির দ্বিগুণ হইলে, ঐ কোণটির পরিমাণ কত? (S. B. '52)

এখানে অপর কোণ দুইটি একত্রযোগে নির্ণেয় কোণটির অর্ধেক,

∴ নির্ণেয় কোণ + উহার অর্ধেক = ত্রিভুজটির তিনটি কোণের সমষ্টি
$= 2$ সমকোণ $= 180^\circ$,

∴ $\frac{3}{2}$ নির্ণেয় কোণ $= 180^\circ$, ∴ নির্ণেয় কোণ $= 180^\circ \times \frac{2}{3} = 120^\circ$.

[**অন্য প্রকারে।** মনে কর নির্ণেয় কোণটি x°, সুতরাং অপর কোণ দুইটির সমষ্টি $= \frac{1}{2}x^\circ$

$$\therefore \quad x^\circ + \tfrac{1}{2}x^\circ = 180^\circ, \text{ বা } \tfrac{3}{2}x^\circ = 180^\circ, \quad \therefore \; x^\circ = 120^\circ \;]$$

উদা. 2. প্রমাণ কর যে, দুইটি সমান্তরাল সরল রেখার কোন ভেদকের একই পার্শ্বে অবস্থিত অন্তঃকোণ দুইটির সমদ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণটি সমকোণ।

$\overleftrightarrow{EF}$ ভেদক $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়কে E ও F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। $\overline{EG}$, ∠BEFকে এবং $\overline{FG}$, ∠EFDকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, ∠EGF এক সমকোণ।

প্রমাণ। ∵ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$,

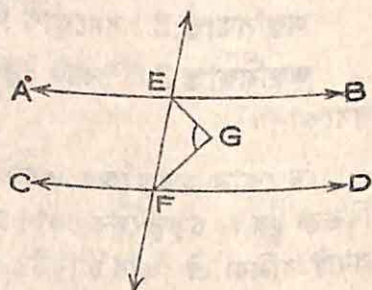
∴ ∠BEF + ∠EFD
= 2 সমকোণ (উপ. 3)।

আবার, ∠GEF = $\frac{1}{2}$∠BEF
এবং ∠GFE = $\frac{1}{2}$∠EFD,

∴ ∠GEF + ∠GFE
= $\frac{1}{2}$(∠BEF + ∠EFD)
= দুই সমকোণের অর্ধেক = 1 সমকোণ।

চিত্র 27

∵ ত্রিভুজের কোণ তিনটির সমষ্টি = 2 সমকোণ,

∴ △GEFএর অবশিষ্ট ∠EGF = 1 সমকোণ।

উদা. 3. কোন চতুর্ভুজের যে কোন দুইটি সন্নিহিত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণটি অপর দুইটি কোণের সমষ্টির অর্ধেক।

ABCD চতুর্ভুজের $\angle A$ ও $\angle B$র সমদ্বিখণ্ডক $\overrightarrow{AO}$ ও $\overrightarrow{BO}$ পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle AOB = \frac{1}{2}(\angle D + \angle C)$.

চিত্র নং 28

প্রমাণ। AOB ত্রিভুজের $\angle O + \angle OAB + \angle OBA = 2$ সমকোণ। ABCD চতুর্ভুজের

$\angle BAD + \angle ABC + \angle C + \angle D = 4$ সমকোণ।

$\therefore \quad \angle O + \angle OAB + \angle OBA$

$= \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle ABC + \angle C + \angle D)$;

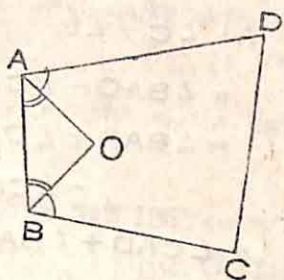
কিন্তু স্বীকার করা আছে যে, $\angle OAB = \frac{1}{2}\angle BAD$ এবং

$\angle OBA = \frac{1}{2}\angle ABC$.

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle O = \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$।

উদা. 4. কোন ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক ও শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্ব টানিলে ঐ দুই রেখার অন্তর্ভূত কোণটি ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তরফলের অর্ধেক হইবে।

$\triangle ABC$তে $\angle BAC$র সমদ্বিখণ্ডক $\overline{AD}$ এবং $\overline{AO} \perp \overline{BC}$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle DAO = \frac{1}{2}(\angle C - \angle B)$.

প্রমাণ। $\angle C + \angle CAO = 90^\circ$ এবং $\angle B + \angle BAO = 90^\circ$.

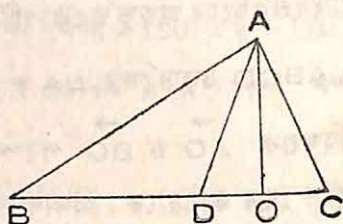
$\therefore \angle C + \angle CAO$

$= \angle B + \angle BAO$.

$\therefore \angle C - \angle B$

$= \angle BAO - \angle CAO$

$= \angle BAD + \angle DAO$

$- \angle CAO$

চিত্র নং 29

$= \angle CAD + \angle DAO - \angle CAO$ ($\because \angle BAD \cong \angle CAD$)

$= \angle DAO + \angle CAO + \angle DAO - \angle CAO$

($\because \angle CAD = \angle CAO + \angle DAO$)

$= 2\angle DAO$.

$\therefore \angle DAO = \frac{1}{2}(\angle C - \angle B)$.

উদা. 5. কোন ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক ও শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্বের অন্তর্ভূত কোণটি 15° এবং শীর্ষকোণটি 60° হইলে, ত্রিভুজটির অপর দুই কোণের পরিমাণ কত?

[উদা. 4 দেখ।] এখানে $\angle DAO = 15^\circ$,

$\therefore \frac{1}{2}(\angle C - \angle B) = \angle DAO = 15^\circ$,

$\therefore \angle C - \angle B = 30^\circ \cdots (1)$

আবার, $\because \angle BAC = 60^\circ$ (স্বীকার)

এবং সমগ্র $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$,

$\therefore \angle C + \angle B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \cdots (2)$

এক্ষণে, (1) ও (2) যোগ করিয়া পাই $2\angle C = 120^\circ + 30^\circ = 150^\circ$.

$\therefore \angle C = 75^\circ$ এবং $\angle B = 120^\circ - 75^\circ = 45^\circ$.

প্রশ্নমালা 5

1. সমকোণী ত্রিভুজের একটি সূক্ষ্মকোণ অপর সূক্ষ্মকোণটির দ্বিগুন হইলে, ঐ কোণ দুইটির পরিমাণ কত ?

2. কোন ত্রিভুজের একটি কোণ অপর কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান হইলে ত্রিভুজটি সমকোণী হইবে। [C. U. '28]

3. একটি ত্রিভুজের বাহু তিনটিকে একই ক্রমে বর্ধিত করিলে উৎপন্ন বহিঃকোণ তিনটির সমষ্টি চারি সমকোণ হয়।

4. কোন ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণ দুইটির সমষ্টি 108° এবং অন্তর 12° ; উহার কোণগুলির পরিমাণ নির্ণয় কর। [C. U. '26]

5. ABC ত্রিভুজের B ও C কোণের সমদ্বিখণ্ডক $\overline{BO}$ ও $\overline{CO}$; প্রমাণ কর যে $\angle BOC = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$

6. দুইটি সরল রেখা যথাক্রমে অপর দুইটি সরলরেখার উপর লম্ব হইলে, ঐ লম্বদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ ঐ শেষোক্ত সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমান হইবে।

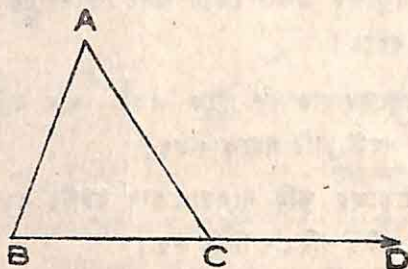
7. একটি ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুকে উভয়দিকে বর্ধিত করিলে বহিঃস্থ কোণ ছয়টির সমষ্টি আট সমকোণ হইবে। [W. B. S. F. '53]

8. সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ হইতে অতিভুজের উপর লম্ব টানিলে যে দুইটি ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তাহারা পরস্পর সদৃশকোণী এবং উহাদের প্রত্যেকটি সমকোণী ত্রিভুজটির সহিত সদৃশকোণী।

9. কোন ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক ও শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্বের অন্তর্ভূত কোণটি 20° এবং শীর্ষকোণটি 70° হইলে, ত্রিভুজটির অপর দুই কোণের পরিমাণ কত ?

10. সামান্তরিকের যে কোন দুইটি নিকটবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডক দুইটির অন্তর্গত কোণ সমকোণ।

উপপাদ্য 5

ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করিলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণটি অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান হয়।

চিত্র নং 30

ABC একটি ত্রিভুজ। উহার $\overline{BC}$ বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করা হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$.

প্রমাণ। $\angle ABC + \angle BCA + \angle BAC = 2$ সমকোণ [উপ. 4]

আবার, $\angle ACD + \angle BCA = 2$ সমকোণ ; [স্বতঃ উপ. 1]

$\therefore \quad \angle ACD + \angle BCA = \angle ABC + \angle BCA + \angle BAC.$

$\therefore \quad \angle ACD = \angle ABC + \angle BAC.$

অনুসিদ্ধান্ত : ত্রিভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করিলে বহিঃস্থ কোণটি প্রত্যেক অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

উপপাদ্য 6

n-সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট কুব্জ বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি $2(n-2)$ সমকোণ।

[যে বহুভুজক্ষেত্রে কোন প্রবৃদ্ধ কোণ নাই তাহাকে কুব্জ বহুভুজ বলে।]

মনে কর, ABCDEF কুব্জ বহুভুজের বাহুসংখ্যা n.

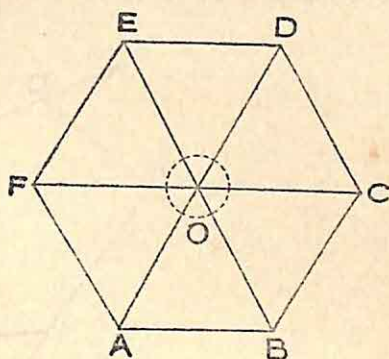
প্রমাণ করিতে হইবে যে, এই n-ভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি $= 2(n-2)$ সমকোণ।

অঙ্কন। এই বহুভুজের ভিতরে যে কোন O বিন্দু লও এবং O-এর সহিত বহুভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি যোগ কর। ইহাতে বহুভুজটি n সংখ্যক ত্রিভুজে বিভক্ত হইল।

চিত্র নং 31

প্রমাণ। ∵ প্রত্যেক ত্রিভুজের কোণসমষ্টি = 2 সমকোণ। [উপ. 4]

∴ n-সংখ্যক ত্রিভুজের কোণসমষ্টি = $2n$ সমকোণ।

আবার, বহুভুজটির অন্তঃকোণগুলি এবং O বিন্দুস্থ কোণগুলি একত্রযোগে ঐ n-সংখ্যক ত্রিভুজের কোণগুলির সমান অর্থাৎ $2n$ সমকোণ।

আবার, O বিন্দুস্থ কোণগুলির সমষ্টি = 4 সমকোণ।

∴ n-ভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি + 4 সমকোণ = $2n$ সমকোণ।

অতএব, n-ভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি = $(2n-4)$ সমকোণ
= $2(n-2)$ সমকোণ।

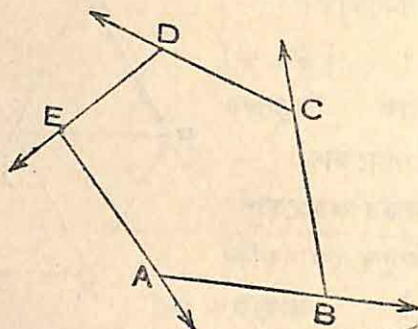
[**দ্রষ্টব্য : (1)** এই উপপাদ্যটিকে অন্যরূপে প্রকাশ করা যায়। যথা, "কোন কুব্জ বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সহিত চারি সমকোণ যোগ করিলে ঐ বহুভুজের বাহুসংখ্যার দ্বিগুণ সমকোণের সমান হয়।"

(2) সুষম বহুভুজের বাহুগুলি ও কোণগুলি সমান বলিয়া উহার প্রত্যেক কোণের পরিমাণ নির্ণয় করা যায়।

(3) n-সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট সুষম ঋজুরেখক্ষেত্রের প্রত্যেক অন্তঃকোণের পরিমাণ x হইলে,

$$x = \frac{2n-4}{n} \text{ সমকোণ} = \left(2 - \frac{4}{n}\right) \text{সমকোণ} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}.$$]

বিবিধ উদাহরণ 6

উদা. 1. কোন কুব্জ বহুভুজের বাহুগুলিকে পর পর একই ক্রমে বর্ধিত করিলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণগুলির সমষ্টি চারি সমকোণ হইবে।

চিত্র নং 32

মনে কর, ABCDE একটি n-বাহুবিশিষ্ট কুব্জ বহুভুজ এবং উহার বাহুগুলিকে পর পর একইক্রমে তীর নির্দিষ্ট দিকে বর্ধিত করা হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, বহিঃস্থ কোণগুলির সমষ্টি$=4$ সমকোণ।

প্রমাণ। বহুভুজটির A, B, C প্রভৃতি প্রত্যেক কৌণিক বিন্দুতে অন্তঃকোণ ও বহিঃকোণের সমষ্টি$=2$ সমকোণ।

এখানে বাহুসংখ্যা n,

$\therefore$ n অন্তঃকোণের সমষ্টি $+ n$ বহিঃকোণের সমষ্টি$=2n$ সমকোণ,

আবার, n অন্তঃকোণের সমষ্টি $+ 4$ সমকোণ$=2n$ সমকোণ [উপ. 6]

$\therefore$ n অন্তঃকোণের সমষ্টি $+ n$ বহিঃকোণের সমষ্টি

$=n$ অন্তঃকোণের সমষ্টি $+ 4$ সমকোণ,

$\therefore$ n বহিঃকোণের সমষ্টি $= 4$ সমকোণ।

উদা. 2. কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহুকে তৃতীয় বাহুর দিকে বর্ধিত করিলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

$\triangle ABC$-র $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$ বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$\angle CBD + \angle BCE > 2$ সমকোণ।

প্রমাণ। বহিঃস্থ $\angle CBD$

$= \angle BAC + \angle ACB$ [উপ. 5]

আবার, বহিঃস্থ $\angle BCE$

$= \angle BAC + \angle ABC$ (উপ. 5)

চিত্র নং 33

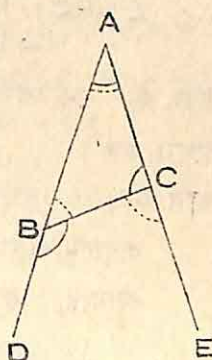
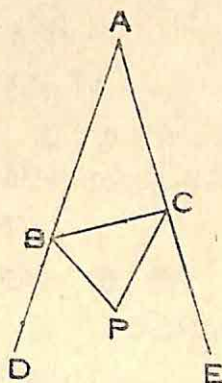
$\therefore \quad \angle CBD + \angle BCE$
$= \angle BAC + (\angle ACB + \angle BAC + \angle ABC)$
$= \angle BAC + 2$ সমকোণ (উপ. 4)

অতএব, $\angle CBD + \angle BCE > 2$ সমকোণ।

উদা. 3. $\triangle ABC$-এর $\angle B$ ও $\angle C$-এর বহিঃসমদ্বিখণ্ডক দুইটির অন্তর্ভূত কোণটি $(90^\circ - \frac{1}{2}\angle A)$এর সমান হইবে।

ABC ত্রিভুজের ABC ও ACB কোণের বহিঃসমদ্বিখণ্ডক $\overline{BP}$ ও $\overline{CP}$ পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,
$\angle BPC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A.$

প্রমাণ। $\angle CBD + \angle BCE$
$= 180^\circ + \angle A$ (উদা. 2 দেখ)

চিত্র নং 34

$\therefore \quad \angle PBC + \angle PCB = \frac{1}{2}(\angle CBD + \angle BCE)$
$= 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A.$

আবার, $\angle BPC + \angle PBC + \angle PCB = 180^\circ$,

$\therefore \quad \angle BPC = 180^\circ - (\angle PBC + \angle PCB)$
$= 180^\circ - (90^\circ + \frac{1}{2}\angle A) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A.$

উদা. 4. যে বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি 540°, তাহার বাহুসংখ্যা কত ?

মনে কর, বহুভুজটির বাহুসংখ্যা n.

এখানে অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি = 540° = 6 সমকোণ।

আবার, অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি + 4 সমকোণ
= বাহুসংখ্যার দ্বিগুণ সমকোণ = $2n$ সমকোণ ;

$\therefore$ 6 সমকোণ + 4 সমকোণ = $2n$ সমকোণ,

বা, $2n = 10$, $\therefore \; n = 5$.

অতএব, বহুভুজটির বাহুসংখ্যা = 5.

উদা. 5. কোন সুষম বহুভুজের একটি অন্তঃকোণ 108° হইলে উহার বাহুসংখ্যা কত ?

$\because$ বহুভুজের প্রত্যেক অন্তঃকোণ ও বহিঃকোণের সমষ্টি
= দুই সমকোণ = 180°,

$\therefore$ এই বহুভুজের প্রত্যেক বহিঃকোণ = $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$.

আবার, যে কোন বহুভুজের বহিঃকোণগুলির সমষ্টি = 4 সমকোণ = 360°.

$\therefore$ নির্ণেয় বাহুসংখ্যা = $360^\circ \div 72^\circ = 5$.

উদা. 6. কোন সুষম বহুভুজের অন্তঃকোণ 102° হইতে পারে কি ?

$\because$ প্রতি অন্তঃকোণ = 102°,

$\therefore$ প্রত্যেক বহিঃকোণ = $180^\circ - 102^\circ = 78^\circ$,

কিন্তু বহিঃকোণগুলির সমষ্টি $=360°$,

$\therefore$ বহুভুজটির বাহুসংখ্যা $=\frac{360}{78}=4\frac{8}{13}$,

কিন্তু বাহুসংখ্যা ভগ্নাংশ হইতে পারে না।

অতএব, কোন সুষম বহুভুজের অন্তঃকোণ $102°$ হইতে পারে না।

উদা. 7. কোন সুষম সরলরৈখিক ক্ষেত্রের একটি বহিঃকোণ একটি অন্তঃকোণের দ্বিগুণ। উহার বাহুসংখ্যা কত ?

একটি বহিঃকোণ + একটি অন্তঃকোণ $=180°$;

আবার, বহিঃকোণ $=2$ অন্তঃকোণ (স্বীকার) ;

$\therefore$ এখানে একটি অন্তঃকোণের 3 গুণ $=180°$,

$\therefore$ একটি অন্তঃকোণ $=60°$,

$\therefore$ একটি বহিঃকোণ $=180°-60°=120°$.

$\therefore$ বাহুসংখ্যা $=360°\div120°=3$.

উদা. 8. কোন সরলরৈখিক ক্ষেত্রের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি বহিঃকোণগুলির সমষ্টির সমান। উহার বাহুসংখ্যা নির্ণয় কর।

[C. U. '44, '48, '49 Sup.]

যে কোন বহুভুজে বহিঃকোণগুলির সমষ্টি $=4$ সমকোণ।

$\therefore$ এখানে অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি $=4$ সমকোণ। আবার যে কোন বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি $+4$ সমকোণ $=$ ঐ বহুভুজের যতগুলি বাহু তাহার দ্বিগুণ সমকোণ। অতএব এখানে বাহু সংখ্যার দ্বিগুণ সমকোণ $=$ অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি $+4$ সমকোণ $=4$ সমকোণ $+4$ সমকোণ $=8$ সমকোণ।

$\therefore$ নির্ণেয় বাহুসংখ্যা $=\frac{1}{2}\times8=4$.

প্রশ্নমালা 6

1. ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোন বিন্দুতে কোন বাহুর সম্মুখ কোণ ঐ বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর। [W. B. S. F. '53]

2. ABC ত্রিভুজের $\overline{BC}$ ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয় সমান। ঐ কোণ দুইটির সমদ্বিখণ্ডক $\overline{BO}$ ও $\overline{CO}$ এবং $\overline{BO}$কে বর্ধিত করা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে, O বিন্দুতে বহিঃস্থ কোণটি ত্রিভুজের প্রত্যেক ভূমিসংলগ্ন কোণের সমান। [C. U. '22]

[সঙ্কেত : $\because \angle ABC \cong \angle ACB$, $\therefore \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\angle ACB$, অর্থাৎ $\angle OBC \cong \angle OCB$. আবার, বহিঃস্থ $\angle DOC = \angle OBC + \angle OCB = 2\angle OCB \cong \angle ACB \cong \angle ABC$.]

3. একটি বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি 900° ; উহার বাহু সংখ্যা কত ?

4. যে সুষম বহুভুজের একটি অন্তঃকোণের পরিমাণ 150°, তাহার বাহুসংখ্যা কত ?

5. কোন সুষম বহুভুজের একটি বহিঃকোণ 24° হইলে উহার বাহু সংখ্যা কত ?

6. কোন সুষম বহুভুজের অন্তঃকোণ 112° হইতে পারে কি ?

7. কোন্ সুষম বহুভুজের অন্তঃকোণ বহিঃকোণের চারিগুণ ?

8. সুষম ষড়্‌ভুজের একটি অন্তঃকোণের পরিমাণ কত ? [C. U. '50]

9. কোন পঞ্চভুজের একটি কোণ সমকোণ এবং অন্য কোণ চারিটি সমান। উহাদের প্রত্যেকটির পরিমাণ কত ডিগ্রী ? [D. B. '27]

10. কোন্ সুষম বহুভুজের প্রত্যেক কোণ দুই সমকোণের $\frac{9}{10}$ অংশ হইবে ?

---

§ 12. পরীক্ষা দ্বারা ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ প্রভৃতির কোণ সমষ্টি নির্ণয়

বিভিন্ন পরীক্ষা দ্বারা ত্রিভুজের কোণ তিনটির সমষ্টি নির্ণয় করা যায়। যথা—

(1) কাগজের উপর যে কোন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর। তৎপরে চাঁদার সাহায্যে উহার কোণ তিনটি মাপিয়া লও। ঐগুলি এখন যোগ করিলে দেখিবে যোগফল 180° বা দুই সমকোণ হইয়াছে।

(2) একটি কাগজের ABC ত্রিভুজ লও। উহার কোণ তিনটি কাটিয়া লও এবং একটি কাগজে $\overleftrightarrow{XY}$ একটি সরলরেখা লইয়া তাহার উপর O বিন্দুতে ঐ কর্তিত A, B, C কোণগুলিকে পর পর পাশাপাশি এরূপে স্থাপন কর যেন তাহাদের শীর্ষ বিন্দুগুলি O বিন্দুর উপর পড়ে। এখন দেখিবে যে, প্রথম ও তৃতীয় কোণের বাহির দিকের বাহুদ্বয় $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ রেখার সহিত মিলিয়া গিয়াছে। অতএব, A, B, C কোণ তিনটি মিলিয়া সরলকোণ XOY হইয়াছে। কিন্তু সরলকোণের পরিমাণ দুই সমকোণ, সুতরাং ত্রিভুজের কোণ তিনটিরও পরিমাণ দুই সমকোণ।

চতুর্ভুজের কোণ সমষ্টি পরীক্ষা দ্বারা নির্ণয় করিতে হইলে উহার একটি কর্ণ টান। এখন চতুর্ভুজটি দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত হইল। ঐ ত্রিভুজ দুইটির কোণ সমষ্টি চারি সমকোণ। অতএব ঐ চতুর্ভুজের কোণ সমষ্টি ত্রিভুজ দুইটির কোণ সমষ্টির সমান বলিয়া চতুর্ভুজের কোণ সমষ্টি চারি সমকোণ হইল।

এইরূপে যে কোন বহুভুজের কোণ সমষ্টি নির্ণয়ের জন্য উহাকে কয়েকটি ত্রিভুজে পরিণত করিবে (উহার একটি কৌণিক বিন্দুর সহিত অন্য কৌণিক বিন্দুগুলি যোগ করিয়া)। ইহাতে যে কয়টি ত্রিভুজ পাইলে তাহাদের কোণসমষ্টিই বহুভুজের কোণসমষ্টি হইবে।

§ 13. ত্রিভুজের বাহু ও কোণের সম্পর্ক ঃ

উপপাদ্য 7

ত্রিভুজের দুইটি বাহু সর্বসম হইলে, উহাদের বিপরীত কোণ দুইটিও সর্বসম হইবে।

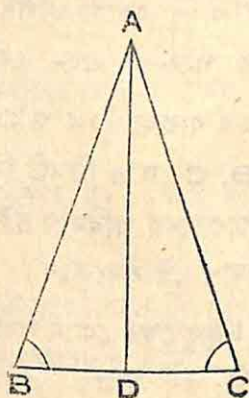
[অথবা, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয় পরস্পর সমান]

ABC একটি ত্রিভুজ, এবং $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ∴ প্রমাণ করিতে হইবে যে, ∠ABC≅∠ACB.

অঙ্কন। মনে কর, $\overline{AD}$ রেখা BAC কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া $\overline{BC}$কে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

চিত্র 35

প্রমাণ। △ABD ও △ACD এর $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (স্বীকার), $\overline{AD}$ উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু, এবং অন্তর্ভূ্ত ∠BAD≅অন্তর্ভূ্ত ∠CAD (অঙ্কন);

∴ ঐ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম [স্বতঃ উপ. 4]।

∴ ∠ABD≅∠ACD, অর্থাৎ ∠ABC≅∠ACB.

অনুসিদ্ধান্ত। কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি সমান হইলে, উহার কোণগুলিও পরস্পর সমান হইবে। সুতরাং সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেকটি কোণের পরিমাণ $\frac{180°}{3}=60°$.

উপপাদ্য 7এর বিকল্প প্রমাণ

প্রমাণ। মনে কর $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$ বাহুদ্বয়ের প্রতিসাম্য রেখা l. ABC ত্রিভুজের সমতলের বিন্দুগুলিকে l সরলরেখায় প্রতিফলিত

কর। যেহেতু প্রতিফলনের ফলে, প্রতিফলন রেখার প্রত্যেকটি বিন্দু স্থির থাকে, সেজন্য A বিন্দুর প্রতিবিম্ব হইবে A বিন্দু এবং $|AB| = |AC|$ হওয়ায়, $\overline{AC}$ রেখাংশ $\overline{AB}$ রেখাংশের প্রতিবিম্ব হইবে এবং B বিন্দুর প্রতিবিম্ব হইবে C বিন্দু। সুতরাং $\angle ABC$র প্রতিবিম্ব হইবে $\angle ACB$. যেহেতু প্রতিফলনের দ্বারা কোন কোণের প্রতিবিম্ব হয় একটি সর্বসম কোণ,

$\therefore \quad \angle ABC \cong \angle ACB.$

উপপাদ্য 8

ত্রিভুজের দুইটি কোণ পরস্পর সর্বসম হইলে, তাহাদের বিপরীত বাহু দুইটিও পরস্পর সর্বসম হইবে।

[স্পষ্টতঃ ইহা উপপাদ্য 7-এর বিপরীত উপপাদ্য।]

ABC একটি ত্রিভুজ, ইহার $\angle ACB \cong \angle ABC$.

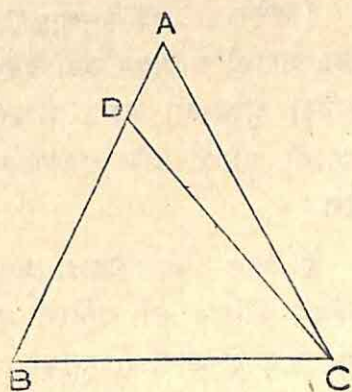
প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

যদি $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$ সর্বসম না হয়, তবে একটি অপরটি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

মনে কর, $|AB| > |AC|$.

এক্ষণে, $\overline{BA}$ হইতে $\overline{AC}$-র সমান করিয়া $\overline{BD}$ অংশ কাটিয়া লও এবং CD যোগ কর।

চিত্র 36

প্রমাণ। $\triangle ABC$ ও $\triangle DBC$-এর $|AC| = |DB|$ (অঙ্কন), $\overline{BC}$ সাধারণ বাহু, এবং অন্তর্ভূত $\angle ACB \cong$ অন্তর্ভূত $\angle DBC$ (স্বীকার),

∴ $\triangle ABC$ ও $\triangle DBC$ সর্বসম।

কিন্তু ∵ DBC ত্রিভুজ স্পষ্টতঃ ABC ত্রিভুজের অংশ,

∴ উহাদের ক্ষেত্রফল সমান হইতে পারে না। অতএব, $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$ অসমান নহে; ∴ $|AB| = |AC|$. ∴ $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

বিকল্প প্রমাণ : চিত্র 35 দেখ।

প্রমাণ। মনে কর l, $\overline{BC}$ রেখাংশের প্রতিসাম্যরেখা এবং ইহা $\overline{BC}$কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

ABC ত্রিভুজের সমতলের বিন্দুগুলিকে l সরলরেখায় প্রতিফলিত কর। যেহেতু l, $\overline{BC}$র প্রতিসাম্যরেখা, ∴ Bর প্রতিবিম্ব হইবে C বিন্দু এবং $\overline{BD}$ রেখাংশের প্রতিবিম্ব হইবে $\overline{CD}$ রেখাংশ। $\angle ABC$ ও $\angle ACB$ সর্বসম, কিন্তু বিপরীত দিক-স্থিতিযুক্ত হওয়ায় $\angle ABC$র প্রতিবিম্ব হইবে $\angle ACB$. সুতরাং $\overline{AB}$ রেখাংশের প্রতিবিম্ব হইবে $\overline{AC}$ রেখাংশ। যেহেতু প্রতিফলনের ফলে কোন রেখাংশের প্রতিবিম্ব সর্বসম একটি রেখাংশ হয়, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

[**দ্রষ্টব্য।** এই উপপাদ্যটিতে প্রমাণের প্রথম প্রণালীতে একটি ভিন্ন প্রণালী অবলম্বন করা হইয়াছে। উপপাদ্যের কল্পনাকে ভিত্তি করিয়া যুক্তিদ্বারা উহার সিদ্ধান্তকে প্রতিষ্ঠিত করাই হইল সাধারণ প্রণালী, এই প্রণালীর প্রমাণকে **অন্বয়ী প্রমাণ** (Direct Proof) বলে।

উপপাদ্য-8-এ আমরা দেখাইলাম যে, উহার সিদ্ধান্তকে সত্য বলিয়া স্বীকার না করিলে যুক্তি দ্বারা যে সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া গিয়াছে তাহা ভ্রান্ত বা অসম্ভব। এরূপে কখনও হয়ত **কল্পনাবিরুদ্ধ** সিদ্ধান্তেও উপনীত হইতে হয়। অতএব উপপাদ্যের সিদ্ধান্ত সত্য বলিয়া স্বীকার করিতে হইবে। প্রমাণের এইরূপ প্রণালীকে **ব্যতিরেকী প্রমাণ** (Indirect Proof) বলে। ইহাকে Reductio ad absurdum (অর্থাৎ অসম্ভব সিদ্ধান্তে পরিণত) প্রণালীও বলে।

অনুসিদ্ধান্ত। ত্রিভুজের কোণগুলি পরস্পর সমান হইলে, উহার বাহুগুলিও পরস্পর সমান হইবে।]

বিকল্প প্রমাণ 2

ABC ত্রিভুজের $\angle ABC \cong \angle ACB$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

অঙ্কন। মনে কর, $\overline{AD}$ সরলরেখা $\angle BAC$কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া $\overline{BC}$কে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। [চিত্র নং 35 আঁকিয়া লও]

প্রমাণ। $\triangle ABD$ ও $\triangle ACD$এর $\angle ABD = \angle ACD$ (স্বীকার)

$\angle BAD = \angle CAD$ (অঙ্কন) এবং $\overline{AD}$ বাহু সাধারণ ;

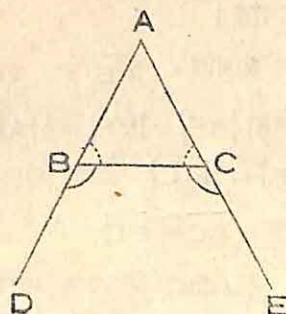
$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। $\therefore$ $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

[ইহা অপেক্ষাকৃত সহজ প্রমাণ। A হইতে $\overline{BC}$-র উপর $\overline{AD}$ লম্ব টানিয়াও ইহা প্রমাণ করা যায়।]

বিবিধ উদাহরণ 7

উদা. 1. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়কে বর্ধিত করিলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণদ্বয়ের প্রত্যেকটি স্থূলকোণ। [C. U. '49 Sup.]

$\triangle ABC$এর $|AB| = |AC|$ এবং $\overline{AB}$কে D পর্যন্ত এবং $\overline{AC}$কে E পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle CBD$ ও $\angle BCE$ প্রত্যেকে স্থূলকোণ।

চিত্র 37

প্রমাণ। $\because$ ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি = 2 সমকোণ,

$\therefore$ $\angle ABC$ ও $\angle ACB$-এর সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

আবার $\because$ $|AB| = |AC|$, $\therefore$ $\angle ABC \cong \angle ACB$

$\therefore$ $\angle ABC$ ও $\angle ACB$ প্রত্যেকে এক সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

$\therefore$ উহাদের প্রত্যেকটির সম্পূরক কোণ এক সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর অর্থাৎ স্থূলকোণ। $\therefore$ $\angle CBD$ ও $\angle BCE$ প্রত্যেকটি স্থূলকোণ।

[দ্রষ্টব্য। (অন্য প্রমাণ) মনে কর, $\overline{BC}$এর উপর $\overline{AP}$ লম্ব টানা হইল।

এক্ষণে, বহিঃস্থ $\angle PBD > \angle APB$, কিন্তু $\angle APB$ সমকোণ,

সুতরাং $\angle PBD$ অর্থাৎ $\angle CBD$ স্থূলকোণ। অনুরূপে $\angle BCE$ স্থূলকোণ।]

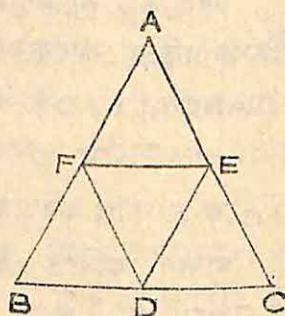
উদা. 2. সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি যুক্ত করিয়া যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তাহাও সমবাহু।

ABC সমবাহু ত্রিভুজের D, E, F বিন্দু যথাক্রমে $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ ও $\overline{AB}$ বাহুর মধ্যবিন্দু। ঐ মধ্যবিন্দুগুলি যোগ করিয়া DEF ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\triangle DEF$ সমবাহু।

প্রমাণ। $\overline{AB}$-র মধ্যবিন্দু F বলিয়া $|AF| = |BF| = \frac{1}{2}|AB|$. অনুরূপে $|AE| = \frac{1}{2}|AC|$ এবং $|BD| = \frac{1}{2}|BC|$; কিন্তু $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, $\therefore$ $\overline{AE} \cong \overline{BD}$.

চিত্র 38

$\triangle ABC$ সমবাহু বলিয়া ইহার কোণগুলি সব সর্বসম।

এক্ষণে AEF ও BFD ত্রিভুজে $\overline{AF} \cong \overline{BF}$, $\overline{AE} \cong \overline{BD}$ এবং $\angle FAE \cong \angle DBF$, $\therefore$ $\triangle AFE$ ও $\triangle BFD$ সর্বসম।

$\therefore\ \overline{FE} \cong \overline{FD}$. অনুরূপে $\triangle BFD$ ও $\triangle EDC$ সর্বসম এবং $\overline{FD} \cong \overline{DE}$. $\therefore\ \overline{FE} \cong \overline{FD} \cong \overline{DE}$. অতএব $\triangle DEF$ সমবাহু।

উদা. 3. কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ দিয়া ভূমির সমান্তরাল সরলরেখা টানিলে উহা শীর্ষকোণটির বহিঃসমদ্বিখণ্ডক হইবে।

ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ এবং শীর্ষ A বিন্দু দিয়া $\overrightarrow{AP} \parallel \overline{BC}$ টানা হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $\overrightarrow{AP}$ সরলরেখা BAC শিরঃকোণের বহিঃসমদ্বিখণ্ডক ;

অর্থাৎ $\angle PAC \cong \angle PAD$.

চিত্র 39

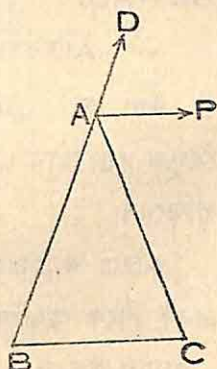
প্রমাণ। $\because\ \overrightarrow{AP} \parallel \overline{BC}$,

$\therefore\ \angle PAC \cong$ একান্তর $\angle ACB$,

এবং $\angle PAD \cong$ অনুরূপ $\angle ABC$.

আবার, $\because\ \overline{AB} \cong \overline{AC}$,

$\therefore\ \angle ABC \cong \angle ACB$.

$\therefore\ \angle PAC \cong \angle PAD$.

উদা. 4. সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমাগুলি পরস্পর সর্বসম।

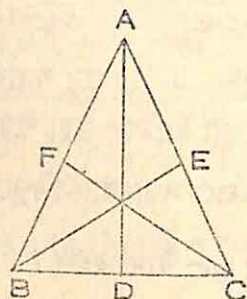
ABC সমবাহু ত্রিভুজের $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ ও $\overline{CF}$ তিনটি মধ্যমা। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\overline{AD} \cong \overline{BE} \cong \overline{CF}$.

প্রমাণ। $\overline{AB}$-র মধ্যবিন্দু F বলিয়া $|BF| = \frac{1}{2}|AB|$. অনুরূপে $|CE| = \frac{1}{2}|AC|$. $\therefore\ \overline{AB} \cong \overline{AC}$ $\therefore\ \overline{BF} \cong \overline{CE}$.

এক্ষণে, $\triangle BFC$ ও $\triangle BEC$-র $\overline{BF} \cong \overline{CE}$, $\overline{BC}$ বাহু সাধারণ

এবং অন্তর্ভূত $\angle FBC \cong$ অন্তর্ভূত $\angle BCE$ (কারণ সমবাহু ত্রিভুজ ABC-র সব কোণই সমান)।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম,

$\therefore$ $\overline{BE} \cong \overline{CF}$.

এইরূপে $\triangle BEA$ ও $\triangle ADB$ হইতে প্রমাণ করা যায় যে $\overline{BE} \cong AD$.

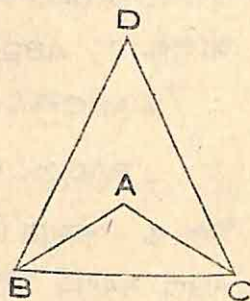
$\therefore$ $\overline{AD} \cong \overline{BE} \cong \overline{CF}$.

চিত্র 40

উদা. 5. একই ভূমির উপর একই পার্শ্বে দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ দণ্ডায়মান থাকিলে একটি ত্রিভুজ সম্পূর্ণরূপে অপরটির মধ্যে পড়িবে। [C. U. '14]

ABC ও DBC দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ একই ভূমি $\overline{BC}$-র উপর একই দিকে অবস্থিত।

প্রমাণ কর যে $\triangle ABC$, $\triangle DBC$-র মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ। $\because$ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ দুইটি একই ভূমির উপর একই দিকে অবস্থিত, $\therefore$ উহাদের ভূমি-সংলগ্ন কোণ পরস্পর অসমান (কারণ, ভূমিস্থ কোণ সমান হইলে ত্রিভুজ দুইটি মিলিয়া যাইত)।

চিত্র 41

মনে কর, $\angle DBC > \angle ABC$, $\therefore$ $\overline{AB}$ বাহু অবশ্যই DBC কোণের মধ্যে পড়িবে। অনুরূপে $\overline{AC}$ বাহু $\angle DCB$-র মধ্যে পড়িবে (কারণ BCD কোণও $\angle ACB$ অপেক্ষা বৃহত্তর)।

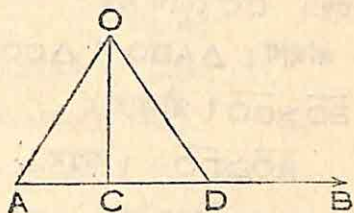
$\therefore$ $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$-র ছেদবিন্দু A অবশ্যই DBC ত্রিভুজের মধ্যে পড়িবে।

অতএব, $\triangle ABC$ সম্পূর্ণরূপে $\triangle DBC$-র মধ্যে অবস্থিত থাকিবে।

উদা. 6. কোন বিন্দু হইতে একটি সরলরেখার উপর তিনটি সমান রেখাংশ টানা সম্ভব নহে।

$\overleftrightarrow{AB}$ একটি সরলরেখা, O ইহার বহিঃস্থ একটি বিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, O হইতে $\overline{AB}$-র উপর তিনটি সমান রেখাংশ টানা যায় না।

O হইতে AB-র উপর $\overline{OA}$ ও $\overline{OD}$ দুইটি সমান রেখাংশ টানা হইল।

চিত্র 42

যদি সম্ভব হয়, মনে কর $\overline{OC}$ রেখাংশও $\overline{OA}$ ও $\overline{OD}$-র সমান টানা হইয়াছে।

$\because$ $\overline{AO} \cong \overline{DO}$, $\therefore$ $\angle OAD \cong \angle ODA$.

আবার $\because$ $\overline{OA} \cong \overline{OC}$, $\therefore$ $\angle OAC \cong \angle OCA$.

অতএব, $\angle OCA \cong \angle ODA$ বা $\angle ODC$, কিন্তু OCA কোণ $\triangle OCD$-র বহিঃস্থ কোণ বলিয়া ইহা $\angle ODC$ কোণের সর্বসম হইতে পারে না।

সুতরাং O হইতে $\overline{AB}$-র উপর তিনটি সমান সরলরেখা টানা সম্ভব নহে।

উদা. 7. যদি কোন ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমিকেও সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

[C. U. '37 ; D. B. '36]

$\triangle ABC$র শীর্ষকোণের ($\angle A$) সমদ্বিখণ্ডক $\overline{AO}$ রেখা ভূমি $\overline{BC}$কে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\triangle ABC$ সমদ্বিবাহু। $\overline{AO}$কে D পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন $\overline{DO} \cong \overline{AO}$ হয়। DC যোগ কর।

চিত্র 43

প্রমাণ। $\triangle ABO$ ও $\triangle CDO$এর

$\overline{BO} \cong \overline{CO}$ (স্বীকার),

$\overline{AO} \cong \overline{DO}$ (অঙ্কন) এবং

$\angle AOB \cong$ বিপ্রতীপ $\angle COD$,

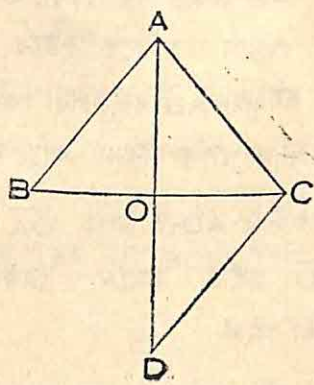
$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

$\therefore$ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ এবং

$\angle CDO \cong \angle BAO \cong \angle CAO$,

$\therefore$ $\overline{AC} \cong \overline{CD}$.

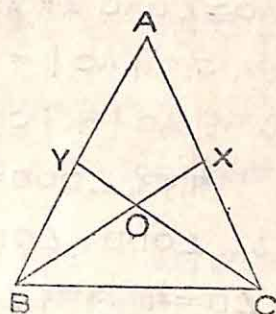
কিন্তু $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. $\therefore$ $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

অতএব, ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

উদা. 8. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির প্রান্তদ্বয় হইতে বিপরীত বাহুদ্বয়ের উপর যথাক্রমে $\overline{BX}$ ও $\overline{CY}$ লম্ব টানা হইল। উহারা O বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিলে প্রমাণ কর যে $\triangle BOC$ সমদ্বিবাহু।

[D. B. '26]

ΔABCর $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\overline{BX} \perp \overline{AC}$ ও $\overline{CY} \perp \overline{AB}$. $\overline{BX}$, $\overline{CY}$কে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

চিত্র 44

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\triangle BOC$ সমদ্বিবাহু।

প্রমাণ। $\triangle BCX$ এর $\angle X$ সমকোণ বলিয়া $\angle XCB + \angle XBC = 1$ সমকোণ। অনুরূপে ΔBYCএর $\angle YBC + \angle YCB = 1$ সমকোণ

$\therefore \quad \angle XCB + \angle XBC = \angle YBC + \angle YCB$ .. (1),

কিন্তু $\because \overline{AB} \cong \overline{AC} \quad \therefore \quad \angle XCB \cong \angle YBC$.

$\therefore$ (1) হইতে পাই $\angle XBC \cong \angle YCB$,

$\therefore \quad \overline{OB} \cong \overline{OC}$.

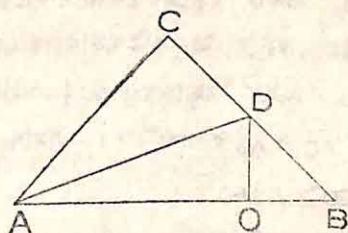
$\therefore$ OBC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

উদা. 9. ABC সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজটির অতিভুজ AB, এবং A কোণের সমদ্বিখণ্ডক $\overline{AD}$, $\overline{BC}$কে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে $|AC| + |CD| = |BA|$. (B. U. '23)

$\triangle ABC$র $\angle C$ সমকোণ, $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ এবং $\angle A$কে $\overline{AD}$, সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া $\overline{BC}$কে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

চিত্র 45

প্রমাণ করিতে হইবে যে $|AC| + |CD| = |AB|$.

D হইতে ABর উপর $\overline{DO}$ লম্ব টান।

প্রমাণ। $\triangle ACD$ ও $\triangle ADO$র মধ্যে $\angle C \cong \angle O$ (সমকোণ), $\angle CAD \cong \angle DAO$ এবং $\overline{AD}$ সাধারণ বাহু, ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$$\therefore \quad |AC| = |AO| \text{ এবং } |CD| = |DO|.$$

$$\therefore \quad |AC| + |CD| = |AO| + |DO|$$

আবার, $\angle DOB = 1$ সমকোণ,

$$\therefore \quad \angle ODB + \angle OBD = 1 \text{ সমকোণ};$$

কিন্তু $\angle B = 45^\circ$ (কারণ $\angle C$ সমকোণ বলিয়া $\angle A = \angle B = 45^\circ$)

$$\therefore \quad \angle ODB = 45^\circ = \angle B. \quad \therefore \quad |DO| = |BO|.$$

অতএব, $|AC| + |CD| = |AO| + |BO| = |AB|$.

প্রশ্নমালা 7

1. প্রমাণ কর যে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণ দুইটি সূক্ষ্মকোণ।

2. সমবাহু চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সর্বসম। [C.U. '23]

3. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিকে উভয়দিকে বর্ধিত করিলে উৎপন্ন কোণ দুইটি সর্বসম হইবে।

4. কোন ত্রিভুজের ভূমিকে উভয়দিকে বর্ধিত করিলে যদি উৎপন্ন বহিঃকোণ দুইটি পরস্পর সমান হয়, তবে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে। [C. U '24]

5. একটি ত্রিভুজের কোন বহিঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক উহার বিপরীত বাহুর সমান্তরাল হইলে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে। [D. B. '26]

6. ABC ত্রিভুজের $|AB| = |AC|$ এবং D, E ও F যথাক্রমে $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ ও $\overline{AB}$-র মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে, $|DE| = |DF|$ এবং $\angle AED \cong \angle AFD$. [C. U. '20, '51]

7. একটি কোণের সমদ্বিখণ্ডকরেখাস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ কোণের একটি বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা টানিলে একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়।

8. একই বাহুর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ একটি সামান্তরিক গঠন করে। [C. U. '13]

9. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের একটি কোণ 60° হইলে, উহা সমবাহু ত্রিভুজ হইবে। [C. U. '51]

10. ABC ত্রিভুজের $\overline{AB} \cong \overline{AC}$; $\overline{BC}$ বাহুর উপর অঙ্কিত একটি লম্ব $\overline{AB}$কে ও বর্ধিত $\overline{CA}$কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিলে APQ ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

11. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির উপরিস্থিত ও উহার দুই প্রান্ত হইতে সমদূরবর্তী দুইটি বিন্দু ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দু হইতেও সমদূরবর্তী হইবে।

12. কোন সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব টানিলে লম্ব তিনটি সমান হইবে।

13. ABC সমবাহু ত্রিভুজের $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ও $\overline{CA}$ বাহু হইতে যথাক্রমে $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ ও $\overline{CF}$ সমান অংশ ছেদ করা হইল। প্রমাণ কর যে, DEF একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

14. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A এবং $\overline{BA}$কে D পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত করা হইল যেন $|AD| = |AB|$ হয়। প্রমাণ কর যে DC যোগ করিলে $\angle BCD$ সমকোণ হইবে।

---

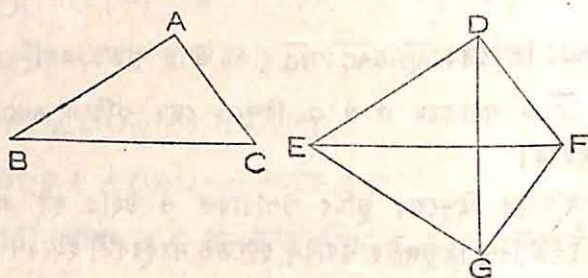
§ 14. ত্রিভুজের সর্বসমতা সম্বন্ধীয় উপপাদ্য।

উপপাদ্য 9

যদি একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটির $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ এবং $\overline{CA} \cong \overline{FD}$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

প্রমাণ। ABC ত্রিভুজকে DEF ত্রিভুজের সহিত এরূপভাবে স্থাপন কর যেন B বিন্দু E বিন্দুর উপর ও $\overline{BC}$ বাহু $\overline{EF}$ বাহুর উপর

চিত্র নং 46

পড়ে এবং $\overline{EF}$ বাহুর যে পার্শ্বে D বিন্দু আছে A বিন্দু যেন তাহার বিপরীত পার্শ্বে পড়ে।

অতএব, $\overline{BC}$ ও $\overline{EF}$ সমান বলিয়া C বিন্দু F বিন্দুর উপর পড়িবে।

মনে কর, GEF ত্রিভুজ ABC ত্রিভুজের নূতন অবস্থান।

DG যোগ কর।

এক্ষণে, $\because$ $|ED| = |AB| = |EG|$,

$\therefore$ $\angle EDG \cong \angle EGD$ (উপ. 7).

আবার, $\because$ $|FD| = |CA| = |FG|$,

$\therefore$ $\angle FDG \cong \angle FGD$ (উপ. 7)।

অতএব, সমগ্র কোণ $\angle EDF \cong$ সমগ্র $\angle EGF \cong \angle BAC$.

এখন, ΔABC ও ΔDEFএর $|AB| = |DE|$,

$|AC| = |DF|$ (স্বীকার)

এবং অন্তর্ভূত $\angle BAC \cong$ অন্তর্ভূত কোণ $\angle EDF$ (প্রমাণিত);

$\therefore$ ΔABC ও ΔDEF সর্বসম (স্বতঃ উপ. 4)।

[দ্রষ্টব্য। (1) ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হওয়ায় উহার অনুরূপ কোণগুলি সমান অর্থাৎ $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$ এবং উভয়ের ক্ষেত্রফলও সমান।

(2) একটি ত্রিভুজকে অপর একটি ত্রিভুজের উপর স্থাপন করিবার সময় উহাদের বৃহত্তম বাহু দুইটি সমাপতিত হইলে এই প্রমাণ সর্বদা প্রযোজ্য হইবে।

(3) একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণ যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের অনুরূপ তিনটি কোণের সমান হইলে, ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম না হইতেও পারে।]

বিবিধ উদাহরণ 8

উদা. 1. কোন চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান হইলে উহা একটি সামান্তরিক হইবে। [C. U. '11]

(চিত্র আঁকিয়া লও)

ABCD চতুর্ভুজের $|AB| = |CD|$, $|AD| = |BC|$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।

AC যোগ কর।

প্রমাণ। ΔABC ও ΔADCর $|AB| = |CD|$, $|BC| = |AD|$ এবং AC সাধারণ বাহু,

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। $\therefore$ $\angle BAC \cong \angle ACD$ এবং $\angle ACB \cong \angle DAC$. $\because$ $\angle BAC \cong$ একান্তর $\angle ACD$,

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ এবং $\because$ $\angle ACB \cong$ একান্তর $\angle DAC$,

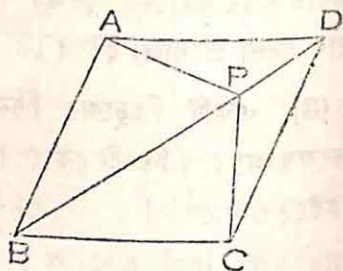
$\therefore$ $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$. $\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক।

উদা. 2. ABCD রম্বসের মধ্যে A ও C বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী P একটি বিন্দু আছে। প্রমাণ কর যে, $\overline{PB}$ ও $\overline{PD}$ একই সরলরেখায় অবস্থিত। (C. U. 1946)

(দ্রষ্টব্য। যাহা যাহা স্বীকার করা আছে তাহা প্রথমে লিখিয়া তারপর নিম্নের অংশ লিখিবে।)

AP, PC এবং BP ও PD যোগ কর।

চিত্র নং 47

প্রমাণ। $\triangle APD$ ও $\triangle PCD$এর
$|AD| = |DC|$,
$|AP| = |PC|$ (স্বীকার)
এবং $\overline{PD}$ সাধারণ বাহু।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। $\therefore$ $\angle APD \cong \angle CPD$.

অনুরূপে $\triangle APB$ ও $\triangle BPC$ সর্বসম। $\therefore$ $\angle APB \cong \angle BPC$.

$\therefore$ $\angle APB + \angle APD = \angle CPB + \angle CPD = 4$ সমকোণের অর্ধেক $= 2$ সমকোণ। $\therefore$ $\overline{BP}$ ও $\overline{PD}$ একই সরলরেখায় অবস্থিত।

উদা. 3. রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [C. U. '35]

ABCD রম্বসের কর্ণ $\overline{AC}$ ও $\overline{BD}$ পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে, $\overline{AC}$ ও $\overline{BD}$ পরস্পর সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

প্রমাণ। $\triangle ABC$ ও $\triangle ADC$র, $\overline{AB} \cong \overline{AD}$, $\overline{BC} \cong \overline{DC}$ এবং $\overline{AC}$ সাধারণ বাহু। $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ $\angle BAC \cong \angle DAC$. আবার $\triangle ABO$ ও $\triangle ADO$র, $\overline{AB} \cong \overline{AD}$, $\overline{AO}$ সাধারণ বাহু এবং $\angle BAO \cong \angle DAO$,

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ $\overline{BO} \cong \overline{DO}$

এবং $\angle AOB \cong \angle AOD$,

চিত্র 48

কিন্তু ইহারা রৈখিকযুগল কোণ বলিয়া প্রত্যেকে এক সমকোণ। অতএব $\overline{BD}$ কর্ণ $\overline{AC}$ দ্বারা সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে। এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, $\overline{AC}$ কর্ণ $\overline{BD}$ দ্বারা সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

উদা. 4. কোন চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান হইলে, উহার কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

ABCD চতুর্ভুজের $|AB| = |CD|$, $|BC| = |AD|$ এবং ইহার $\overline{AC}$ ও $\overline{BD}$ কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

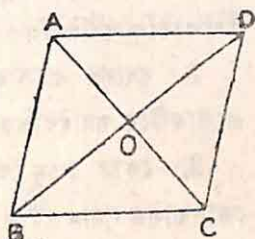
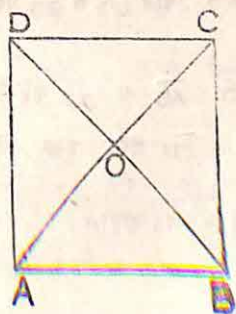
চিত্র নং 49

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ঐ কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে, অর্থাৎ $|AO| = |CO|$ এবং $|BO| = |DO|$.

প্রমাণ। $\triangle ABC$ ও $\triangle ACD$-এর $|AB| = |CD|$, $|BC| = |AD|$ এবং $\overline{AC}$ সাধারণ বাহু।

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। ∴ $\angle BAC \cong \angle ACD$.

আবার, $\triangle AOB$ ও $\triangle COD$-এর $\angle OAB \cong \angle OCD$, $\angle AOB \cong$ বিপ্রতীপ $\angle COD$, এবং $|AB| = |CD|$;

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ $|AO| = |CO|$ এবং $|BO| = |DO|$.

প্রশ্নমালা ৪

1. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু ও ভূমির মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা শীর্ষকোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং ভূমির উপর লম্ব হয়। [C. U. ; D. B.]

2. রম্বসের প্রত্যেক কর্ণ উহার যে দুইটি কোণ দিয়া যায় তাহাদের প্রত্যেকটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [C. U. '16]

3. কোন চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি সমান হইলে, উহার বিপরীত কোণগুলিও সমান হইবে।

4. একই ভূমির উপর অবস্থিত দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাটি (1) শীর্ষকোণ দুইটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, (2) ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং (3) ভূমির উপর লম্ব হয়। [C. U. '38]

5. $\triangle ABC$ ও $\triangle PQR$এর $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$ বাহু যথাক্রমে $\overline{PQ}$ ও $\overline{PR}$ বাহুর সমান। যদি $\overline{BD}$ ও $\overline{QS}$ মধ্যমাদ্বয় সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে। [N. U. '49]

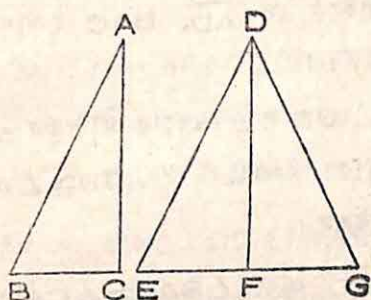
6. $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ দুইটি সমান সরলরেখার পরস্পর বিপরীত প্রান্তবিন্দু $\overline{AD}$ ও $\overline{CB}$ দ্বারা যুক্ত হইয়াছে। $\overline{AD}$ ও $\overline{CB}$ সমান হইলে, প্রমাণ কর যে $\overleftrightarrow{AC}$ ও $\overleftrightarrow{BD}$ সমান্তরাল।

উপপাদ্য 10

একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও আর একটি বাহু যথাক্রমে অন্য একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও আর একটি বাহুর সমান হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

ABC ও DEF দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ ও $\angle F$ সমকোণ। ইহাদের অতিভুজ $\overline{AB} \cong$ অতিভুজ $\overline{DE}$ এবং $\overline{AC}$ বাহু $\cong \overline{DF}$ বাহু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সর্বসম।

প্রমাণ। $\triangle ABC$কে $\triangle DEF$-এর সহিত এরূপভাবে স্থাপন কর যেন A বিন্দু D বিন্দুর উপর ও $\overline{AC}$ বাহু $\overline{DF}$ বাহুর উপর পড়ে, এবং $\overline{DF}$এর যে পার্শ্বে E বিন্দু অবস্থিত B বিন্দু যেন তাহার বিপরীত পার্শ্বে পড়ে।

চিত্র 50

যেহেতু, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\therefore$ C বিন্দু F বিন্দুর উপর পড়িবে। G বিন্দু যেন B বিন্দুর নূতন অবস্থান।

অতএব, DFG ত্রিভুজ $\triangle ACB$এর নূতন অবস্থান হইল।

$\because$ $\angle DFG \cong \angle ACB = 1$ সমকোণ,

$\therefore$ $\angle DFE + \angle DFG = 2$ সমকোণ,

$\therefore$ EFG একটি সরলরেখা। [স্বতঃ উপ. 2·]।

এক্ষণে, DEG একটি ত্রিভুজ হইল।

$\because$ $\overline{DE} \cong \overline{AB} \cong \overline{DG}$,

$\therefore$ $\angle DEF \cong \angle DGF \cong \angle ABC$.

এখন, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$এর $\angle ACB \cong \angle DFE$ (সমকোণ), $\angle ABC \cong \angle DEF$ (প্রমাণিত), এবং $\overline{AC} \cong \overline{DF}$,

$\therefore$ ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম (স্বতঃ উপ. 6)।

বিবিধ উদাহরণ 9

উদা. 1. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বটি ভূমি ও শীর্ষকোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [C. U. '13]

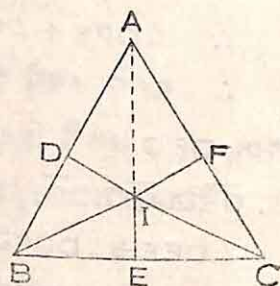
ABC একটি ত্রিভুজ, ইহার $|AB| = |AC|$ এবং $\overline{AD} \perp \overline{BC}$. প্রমাণ করিতে হইবে যে $\overline{AD}$, BAC কোণকে এবং $\overline{BC}$কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

প্রমাণ। $\triangle ABD$ ও $\triangle ACD$র অতিভুজ $\overline{AB} \cong$ অতিভুজ $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ বাহু সাধারণ এবং $\angle ADB \cong \angle ADC$ (সমকোণ,)
$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore$ $\overline{BD} \cong \overline{CD}$ এবং $\angle BAD \cong \angle CAD$, অর্থাৎ $\overline{AD}$ রেখা $\angle BAC$কে ও $\overline{BC}$কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

উদা. 2. ABC ত্রিভুজের ABC ও ACB কোণের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি পরস্পর I-বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে $\overline{AI}$, BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

ABC ত্রিভুজের $\angle ABC$ ও $\angle ACB$এর সমদ্বিখণ্ডক $\overline{BI}$ ও $\overline{CI}$ পরস্পর I-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $\overline{AI}$, $\angle BAC$কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

চিত্র 51

অঙ্কন। $\overline{ID}$, $\overline{IE}$ ও $\overline{IF}$ যথাক্রমে $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ও $\overline{AC}$ বাহুর উপর লম্ব টান। AI যোগ কর।

প্রমাণ। ΔBID ও ΔBIEএর $\angle IBD \cong \angle IBE$ (স্বীকার)

$\angle IDB \cong \angle IEB$ (সমকোণ), এবং IB বাহু সাধারণ।

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম; $\therefore$ $\overline{ID} \cong \overline{IE}$.

অনুরূপে $\overline{IE} \cong \overline{IF}$. $\therefore$ $\overline{ID} \cong \overline{IE} \cong \overline{IF}$.

এক্ষণে, IDA ও IFA সমকোণী ত্রিভুজের $\overline{IA}$ সাধারণ অতিভুজ, এবং $\overline{ID} \cong \overline{IF}$, $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore$ $\angle IAD \cong \angle IAF$.

$\therefore$ অতএব, $\overline{AI}$, BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

উদা. 3. কোন ত্রিভুজের দুইটি কৌণিক বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটি সমান হইলে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে। [D.B. ; W.B.S.F. '55]

ABC একটি ত্রিভুজ; উহাতে $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ও $\overline{CE} \perp \overline{AB}$

এবং $|BD| = |CE|$.

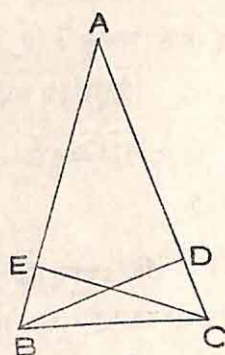
প্রমাণ করিতে হইবে যে, ΔABC সমদ্বিবাহু।

চিত্র 52

প্রমাণ। BCD ও BCE সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের $\overline{BC}$ সাধারণ অতিভুজ এবং $|BD| = |CE|$;

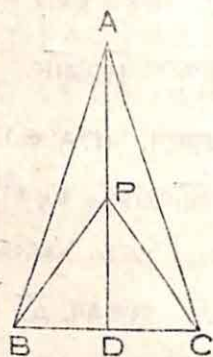
$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

$\therefore$ $\angle EBC \cong \angle DCB$ অর্থাৎ $\angle ABC \cong \angle ACB$.

$\therefore$ $|AB| = |AC|$. অতএব ΔABC সমদ্বিবাহু।

উদা. 4. ABC ত্রিভুজের A হইতে $\overline{BC}$র উপর $\overline{AD}$ লম্ব এবং $\overline{AD}$এর উপরিস্থিত P বিন্দুটি B ও C হইতে সমদূরবর্তী। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

ABC ত্রিভুজে $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $\overline{AD}$-এর উপর P একটি বিন্দু এবং $|PB| = |PC|$. প্রমাণ করিতে হইবে যে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

চিত্র 53

প্রমাণ। BPD ও CPD সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অতিভুজ $\overline{PB} \cong$ অতিভুজ $\overline{PC}$ এবং $\overline{PD}$ সাধারণ বাহু।

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। ∴ $\overline{BD} \cong \overline{CD}$.

আবার, △ABD ও △ ACDএর $\overline{BD} \cong \overline{CD}$, $\overline{AD}$ সাধারণ বাহু এবং অন্তর্ভূক্ত ∠ADB≅অন্তর্ভূক্ত ∠ADC (সমকোণ বলিয়া)

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, ∴ △ABC সমদ্বিবাহু।

প্রশ্নমালা 9

1. যদি কোন ত্রিভুজের ভূমির মধ্যবিন্দু হইতে অপর বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয় সমান হয়, তবে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

[P. U. '33 ; C. U. '48]

2. একটি কোণের বাহু দুইটি হইতে সমদূরবর্তী যে কোন বিন্দু ঐ কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

3. সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব টানিলে লম্ব তিনটি সমান হইবে।

4. বৃত্তের কেন্দ্র হইতে উহার কোন জ্যার উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

ইহার বিপরীত উপপাদ্য কি হইবে? তাহাও প্রমাণ কর।

5. দুইটি ত্রিভুজের একটির দুই বাহু অপরটির দুই বাহুর সমান; এবং যে কোন অনুরূপ বাহুদ্বয়ের প্রান্তবিন্দু হইতে অপর অনুরূপ বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটি সমান। প্রমাণ কর যে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

---

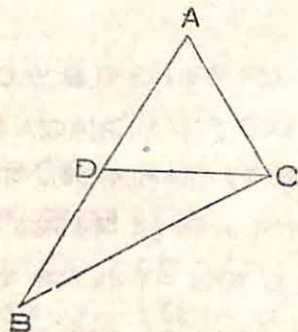
§ 15. ত্রিভুজের বাহু ও কোণের অসমতা

উপপাদ্য 11

কোন ত্রিভুজের একটি বাহু অপর একটি বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণটি ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

ABC একটি ত্রিভুজ, ইহার $\overline{AB}$ বাহু $\overline{AC}$ বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle ACB > \angle ABC$.

অঙ্কন। $\overline{AB}$ হইতে $\overline{AC}$র সর্বসম $\overline{AD}$ অংশ কাটিয়া লও এবং CD যোগ কর।

চিত্র 54

প্রমাণ। $\because$ $\overline{AD} \cong \overline{AC}$,

$\therefore$ $\angle ADC \cong \angle ACD$.

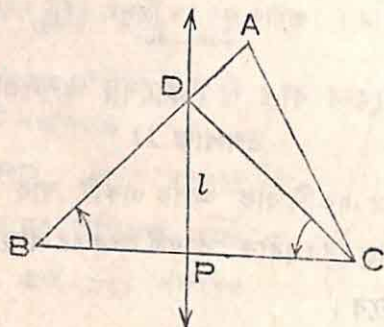
যেহেতু, Δ BDCর বহিঃকোণ $\angle ADC > \angle DBC$,

$\therefore$ $\angle ACD > \angle DBC$,

কিন্তু, $\angle ACB > \angle ACD$,

$\therefore$ $\angle ACB > \angle DBC$, অর্থাৎ $\angle ACB > \angle ABC$.

[দ্রষ্টব্য। উপপাদ্যটির সাধারণ নির্বচনে 'একটি বাহু অপর একটি বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর' এরূপ না বলিয়া 'দুইটি বাহু অসমান' এরূপও বলা যায়।]

বিকল্প প্রমাণ

চিত্র নং 55

মনে কর l রেখা B ও C বিন্দুর প্রতিসাম্য রেখা।

যেহেতু $|AB|>|AC|$, l সরলরেখা A বিন্দু দিয়া যাইবে না। l ত্রিভুজের সমতলকে দুইটি অর্ধসমতলে ভাগ করে এবং C বিন্দু B বিন্দু অপেক্ষা A বিন্দুর নিকটতর হওয়ায় A এবং C একই অর্ধ-সমতলে এবং B অপর অর্ধ-সমতলে অবস্থিত। সুতরাং সম্পূর্ণ $\overline{AC}$ রেখাংশ A ও Cএর সহিত একই অর্ধ-সমতলে অবস্থিত। এইবার মনে কর, $\overline{AB}$ রেখাংশ, l সরলরেখাকে D বিন্দুতে ছেদ করে। যেহেতু l, B ও Cর প্রতিসাম্য রেখা, $\therefore$ $|BD| = |CD|$

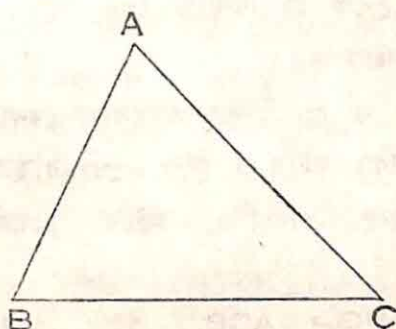
$\therefore$ ΔDBC সমদ্বিবাহু। $\therefore$ $\angle DBC \cong \angle DCB$.

$\therefore$ এক্ষণে $\angle ACB$র অংশ হওয়ায়, $\angle DCB < \angle ACB$.

$\therefore$ $\angle DBC < \angle ACB$ অর্থাৎ $\angle ABC < \angle ACB$.

$\therefore$ $\angle ACB > \angle ABC$

উপপাদ্য 12

কোন ত্রিভুজের একটি কোণ অপর একটি কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহুটি ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

চিত্র নং 56

ABC একটি ত্রিভুজ, ইহার $\angle ABC > \angle ACB$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $|AC| > |AB|$.

প্রমাণ। যদি $\overline{AC}$ বাহু $\overline{AB}$ বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর না হয়, তবে $\overline{AC}$ বাহু $\overline{AB}$ বাহুর সমান অথবা $\overline{AB}$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

এক্ষণে, যদি $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ হয়, তবে $\angle ABC \cong \angle ACB$ হইবে। কিন্তু তাহা হইতে পারে না। কারণ, স্বীকার করা হইয়াছে যে ঐ কোণদ্বয় অসমান।

আবার, যদি $|AC| < |AB|$ হয়,

তবে $\angle ABC < \angle ACB$ হইবে (উপ. 11),

কিন্তু তাহা হইতে পারে না, কারণ স্বীকার করা আছে যে $\angle ABC > \angle ACB$.

অতএব, $\overline{AC}$ বাহু $\overline{AB}$ বাহুর সমানও নহে, অথবা $\overline{AB}$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতরও নহে। $\therefore$ $|AC| > |AB|$.

বিকল্প প্রমাণ

উপপাদ্য 11এর বিকল্প প্রমাণের চিত্রের অনুরূপ চিত্র অঙ্কন কর। এখানে l রেখা $\overline{AC}$কে ছেদ করিবে।

মনে কর l, B ও C বিন্দুর প্রতিসাম্য রেখা এবং l, $\overline{BC}$কে P বিন্দুতে এবং $\overline{AC}$কে D বিন্দুতে ছেদ করে। $\angle ACP$কে l সরলরেখায় প্রতিফলিত কর।

যেহেতু l, B ও C বিন্দুর প্রতিসাম্য রেখা, $\therefore$ $\angle ACB$র শীর্ষবিন্দু Cর প্রতিবিম্ব হইবে B বিন্দু, $\overline{CP}$ বাহুর প্রতিবিম্ব হইবে $\overline{BP}$ এবং $\angle ACP$র প্রতিবিম্ব হইবে বিপরীতদিকস্থিতিযুক্ত সর্বসম $\angle DBP$.

যেহেতু $\angle ABC > \angle ACB$ এবং $\angle DBP \cong \angle DCP$,
$\therefore$ $\angle ABC > \angle DCP$.

$\therefore$ $\angle DCP$ বা $\angle DCB$র $\overline{DC}$ বাহু ত্রিভুজের ভিতরে অবস্থিত হইবে। আবার $\angle DBC \cong \angle DCB$ বলিয়া $\triangle DBC$ একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

$$\therefore \quad |DB| = |DC|$$

$\therefore$ D বিন্দু B ও Cর প্রতিসাম্য রেখা lএর উপর অবস্থিত।
এক্ষণে l, ত্রিভুজের সমতলকে দুইটি অর্ধসমতলে বিভক্ত করিয়াছে এবং A ও B একই অর্ধসমতলে অবস্থিত।

$\therefore$ C বিন্দু অপেক্ষা B বিন্দু A বিন্দুর নিকটতর।
অর্থাৎ $|AC| > |AB|$.

[দ্রষ্টব্য। (1) এই উপপাদ্যটি উপপাদ্য 11-র বিপরীত।
(2) ইহারও সাধারণ নির্বচনে 'একটি কোণ অপর একটি কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর' এরূপ না বলিয়া 'দুইটি কোণ অসমান' বলা যায়।]

বিবিধ উদাহরণ 10

উদা. 1. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজটি উহার বৃহত্তম বাহু। [C. U. '15, '28, '35]

মনে কর, ΔABCর $\angle B$ সমকোণ। প্রমাণ করিতে হইবে অতিভুজ $\overline{AC}$ ঐ ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু। $\overline{CB}$কে D পর্যন্ত বর্ধিত কর। এক্ষণে ABD কোণও সমকোণ। বহিঃস্থ $\angle ABD$ অন্তঃস্থ বিপরীত $\angle ACB$ ও $\angle CAB$র প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

$\therefore$ $\angle ABC$ ঐ ত্রিভুজের বৃহত্তম কোণ, সুতরাং বৃহত্তম ABC কোণের বিপরীত বাহু $\overline{AC}$ অপর কোণ দুইটির বিপরীত বাহু $\overline{AB}$ ও $\overline{BC}$ অপেক্ষা বৃহত্তর। অতএব, অতিভুজ $\overline{AC}$ই ঐ ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু।

উদা. 2. ABCD চতুর্ভুজের $\overline{AD}$ বৃহত্তম এবং $\overline{BC}$ ক্ষুদ্রতম বাহু। প্রমাণ কর যে, C কোণটি A কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর। [C.U. '18, '40]

ABCD চতুর্ভুজের $\overline{AD}$ বৃহত্তম ও $\overline{BC}$ ক্ষুদ্রতম বাহু। AC যোগ কর।

প্রমাণ। ΔACDএর $|AD|>|CD|$ ($\because$ $\overline{AD}$ বৃহত্তম বাহু), $\therefore$ $\angle ACD > \angle CAD$.

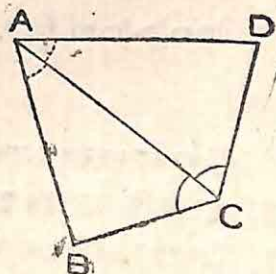
আবার, ΔABCএর $|AB|>|BC|$ (কারণ $\overline{BC}$ বাহু ক্ষুদ্রতম),

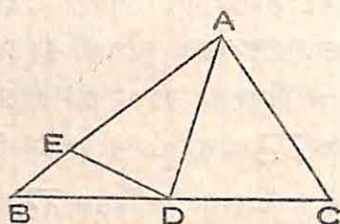
$\therefore$ $\angle BCA > \angle BAC$.

$\therefore$ $\angle ACD + \angle BCA >$

$\angle CAD + \angle BAC$,

চিত্র 57

অর্থাৎ সমগ্র $\angle BCD >$ সমগ্র $\angle BAD$.

উদা. 3. ABC ত্রিভুজে $\overline{AC}$ অপেক্ষা $\overline{AB}$ বৃহত্তর এবং $\overline{AD}$ সরলরেখা A কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া $\overline{BC}$র সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর যে $|BD| > |CD|$.

$\overline{AB}$ হইতে $\overline{AC}$র সমান করিয়া $\overline{AE}$ অংশ কাটিয়া লও। DE যোগ কর।

চিত্র 58

এখন $\triangle ADE$ ও $\triangle ACD$র $\overline{AE} \cong \overline{AC}$, $\overline{AD}$ সাধারণ বাহু এবং $\angle EAD \cong \angle CAD$ (স্বীকার),

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। $\therefore$ $\overline{DE} \cong \overline{CD}$ এবং $\angle ADE \cong \angle ADC$.

ABD ত্রিভুজের বহিঃস্থ $\angle ADC > \angle B$, $\therefore$ $\angle ADE > \angle B$.

আবার, বহিঃস্থ $\angle BED > \angle ADE$. $\therefore$ $\angle BED > \angle EBD$.

$\therefore$ $|BD| > |DE|$ কিন্তু $\overline{DE} \cong \overline{DC}$. $\therefore$ $|BD| > |DC|$.

প্রশ্নমালা 10

1. ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহুসংলগ্ন কোণ দুইটি সূক্ষ্মকোণ।

2. স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণের বিপরীত বাহুটি উহার বৃহত্তম বাহু।

3. ত্রিভুজের দুইটি বাহু অসমান হইলে ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণটি সূক্ষ্মকোণ হইবে।

4. ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর অন্তরফল তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

5. $\triangle ABC$র $\angle B$ ও $\angle C$এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় I-বিন্দুতে মিলিত হইল। যদি $|AB| > |AC|$ হয়, তবে $|IB| < |IC|$ হইবে।

6. কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপরিস্থ কোন বিন্দুর দূরত্ব উহার একটি বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে, কিন্তু বিন্দুটি ভূমির বর্ধিতাংশের উপর থাকিলে ঐ দূরত্ব একটি বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

উপপাদ্য 13

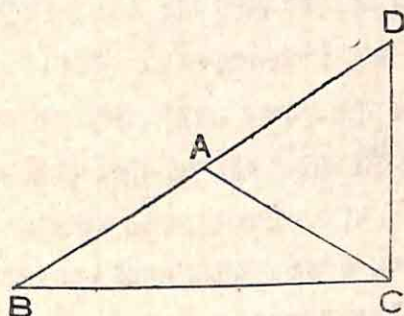
ত্রিভুজের যে কোন দুইটি বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

ABC একটি ত্রিভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে ইহার যে কোন দুইটি বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

অঙ্কন। $\overline{BA}$ বাহুকে D পর্যন্ত এরূপভাবে বর্ধিত কর যেন $\overline{AD} \cong \overline{AC}$ হয়। DC যোগ কর।

প্রমাণ। $\because \overline{AD} \cong \overline{AC}$, $\therefore \angle ACD \cong \angle ADC$ [উপ. 7]

কিন্তু $\angle BCD > \angle ACD$,

চিত্র নং 59

$\therefore \angle BCD > \angle ADC$, অর্থাৎ $\angle BCD > \angle BDC$

এক্ষণে, $\because$ BCD ত্রিভুজে $\angle BCD > \angle BDC$,

$\therefore\ |BD| > |BC|$ [উপ. 12]

কিন্তু $|BD| = |BA| + |AD| = |BA| + |AC|$,

$\therefore\ |BA| + |AC| > |BC|$.

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, $|AB| + |BC| > |AC|$,

এবং $|AC| + |BC| > |AB|$.

[দ্রষ্টব্য। (1) $\overline{BC}$ যদি ত্রিভুজটির বৃহত্তম বাহু হয়, তবে $|AB| + |AC| > |BC|$ প্রমাণ করিলেই যথেষ্ট হইবে।

(2) দুইটি বিন্দু-সংযোজক সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য ঐ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে ন্যূনতম দূরত্ব। ইহা স্বীকার করিলে এই উপপাদ্যটি স্বতঃসিদ্ধ হইয়া পড়ে। কারণ, $\overline{BC}$ সরলরেখার দৈর্ঘ্য হইল B ও C বিন্দুর মধ্যে ক্ষুদ্রতম দূরত্ব। সুতরাং এই দুই বিন্দুর দূরত্ব $\overline{BA}$ ও $\overline{AC}$ এই দুই রেখা বরাবর ধরিলে তাহা অবশ্যই $\overline{BC}$এর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।]

বিবিধ উদাহরণ 11

উদা. 1. কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু 2 ও 3 হইলে তৃতীয় বাহুটি 5 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কিন্তু 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে। [C. U. '25]

ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। অতএব এখানে তৃতীয় বাহুটি অন্য দুই বাহুর সমষ্টি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে অর্থাৎ (2+3) বা 5 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে। আবার দ্বিতীয় বাহুটি 3 বলিয়া প্রথম ও তৃতীয় বাহুর সমষ্টি 3 অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে, কিন্তু প্রথম বাহুটি 2 জানা আছে। অতএব তৃতীয় বাহুটি 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

উদা. 2. ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর অন্তরফল তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। [C. U. '34 ; W. B. S. F. '52]

ABC একটি ত্রিভুজ। প্রমাণ করিতে হইবে, ইহার যে কোন দুই বাহুর অন্তর তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

প্রমাণ। মনে কর $|AB| > |AC|$, $\overline{AB}$ হইতে $\overline{AC}$র সমান $\overline{AD}$ অংশ কাটিয়া লও। এখন $\overline{BD}$ হইল $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$র অন্তরফল।

এক্ষণে $|AC| + |BC| > |AB|$,

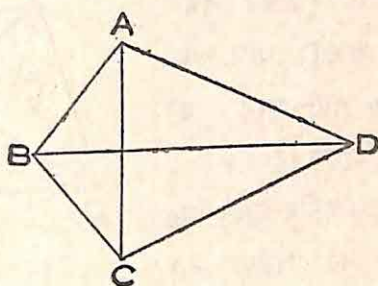
অর্থাৎ $|AC| + |BC| > |AD| + |BD|$,

কিন্তু $|AC| = |AD|$.

$\therefore$ $\overline{BC}$ বাহু অবশ্যই $\overline{BD}$ অপেক্ষা বৃহত্তর,

অর্থাৎ $|BD| < |BC|$.

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, অন্য যে কোন দুই বাহুর অন্তরও তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

উদা. 3. কোন চতুর্ভুজের বাহু চারিটির সমষ্টি উহার কর্ণদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর। [C. U. '20 ; D. B. '38]

চিত্র 60

ABCD চতুর্ভুজের $\overline{AC}$ ও $\overline{BD}$ দুইটি কর্ণ। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $|AB| + |BC| + |CD| + |DA| >$

$|AC| + |BD|$.

প্রমাণ। $|AB| + |BC| > |AC|$,

$|BC| + |CD| > |BD|$,

$|CD| + |DA| > |AC|$

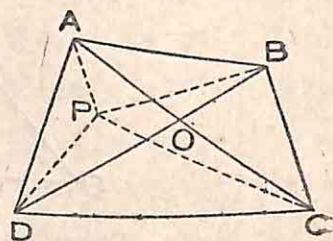
এবং $|AB| + |AD| > |BD|$.

উহাদের যোগফল হইতে পাই

$$2(|AB| + |BC| + |CD| + |DA|) > 2(|AC| + |BD|).$$

$$\therefore |AB| + |BC| + |CD| + |DA| > |AC| + |BD|$$

উদা. 4. একটি চতুর্ভুজের মধ্যে এরূপ একটি বিন্দু নির্ণয় কর যেন চতুর্ভুজটির কৌণিক বিন্দুগুলি হইতে উহার দূরত্বগুলির সমষ্টি লঘিষ্ঠ হয়। [C. U. '44]

ABCD একটি চতুভুজ। উহার মধ্যে এমন একটি বিন্দু নির্ণয় করিতে হইবে যেন A, B, C, D বিন্দু হইতে তাহার দূরত্বের সমষ্টি ক্ষুদ্রতম হয়। AC ও BD যোগ কর। ইহারা O বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিল। উহাই নির্ণেয় বিন্দু।

চিত্র 61

প্রমাণ। চতুর্ভুজটির মধ্যে অন্য যে কোন বিন্দু P লইয়া PA, PB, PC ও PD যোগ কর। এখন $|PA| + |PC| > |AC|$ এবং $|BP| + |PD| > |BD|$,

$$\therefore |AP| + |PC| + |BP| + |PD| > |AC| + |BD|,$$

অর্থাৎ $|AP| + |PC| + |BP| + |PD| >$
$|OA| + |OC| + |OB| + |OD|$.

O ভিন্ন যে কোন বিন্দুর পক্ষেই ইহা সত্য।

∴ O বিন্দুই নির্ণেয় বিন্দু।

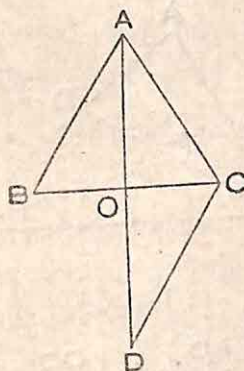
উদা. 5. কোন ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমার দ্বিগুণ অপেক্ষা বৃহত্তর। [D. B. '32]

$\overline{AO}$, ΔABC-র একটি মধ্যমা।

প্রমাণ করিতে হইবে, $|AB| + |AC| > 2|AO|$.

প্রমাণ। $\overline{AO}$কে D পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন $|DO| = |AO|$ হয়। DC যোগ কর।

ΔABO ও ΔCODর $\overline{AO} \cong \overline{DO}$ (অঙ্কন), $\overline{BO} \cong \overline{CO}$ (স্বীকার), $\angle AOB \cong$ বিপ্রতীপ $\angle COD$,

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

চিত্র 62

এখন, ACD ত্রিভুজে $|AC| + |CD| > |AD|$,
∴ $|AB| + |AC| > |AD|$, কিন্তু $|AD| = 2|AO|$,
∴ $|AB| + |AC| > 2|AO|$.

উদা. 6. ত্রিভুজের কোন বাহুর প্রান্তদ্বয় হইতে ত্রিভুজটির অন্তঃস্থ কোন বিন্দু পর্যন্ত দুইটি সরলরেখা টানিলে উহারা একত্রে ত্রিভুজটির অপর বাহুদ্বয় অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে। [D. B. '27]

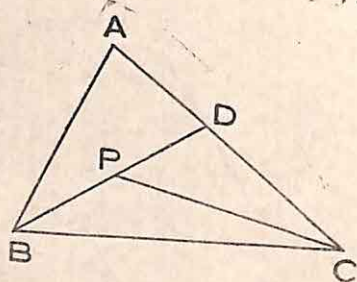
ABC ত্রিভুজের মধ্যে P একটি বিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে। $|BP| + |PC| < |AB| + |AC|$.

প্রমাণ। BP ও CP যোগ কর। $\overline{BP}$কে বর্ধিত কর, উহা $\overline{AC}$কে D বিন্দুতে ছেদ করিল।

এক্ষণে, $|AB| + |AD| > |BD|$,

অর্থাৎ $|AB| + |AD| > |BP| + |PD|$.

আবার $|PD| + |DC| > |PC|$. এই দুইটির যোগফল লইলে পাই $|AB| + |AD| + |DC| + |PD| >$ $|BP| + |PD| + |PC|$.

চিত্র 63

$\therefore\ |AB| + |AD| + |DC| > |BP| + |PC|$
(উভয়পক্ষ হইতে $|PD|$ বাদ দেওয়া হইল),

অর্থাৎ $|AB| + |AC| > |BP| + |PC|$

$(\because\ |AD| + |DC| = |AC|)$.

$\therefore\ |BP| + |PC| < |AB| + |AC|$.

প্রশ্নমালা 11

1. চতুর্ভুজের যে কোন তিনটি বাহুর সমষ্টি চতুর্থ বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। [C. U. '13, '33]

2. A বিন্দু হইতে BC বাহুর উপর লম্ব টানিয়া উপপাদ্য 13 প্রমাণ কর।

3. A কোণের সমদ্বিখণ্ডক টানিয়া উপপাদ্য 13 প্রমাণ কর।

4. △ABCর A কোণটি বৃহত্তম। প্রমাণ কর যে $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ও $2\,\overline{BC}$এর সমান বাহুবিশিষ্ট কোন ত্রিভুজ অঙ্কন করা সম্ভব নহে। [C. U. '46]

5. কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু 4 এবং 5 ; প্রমাণ কর যে, উহার তৃতীয় বাহুটি 9 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কিন্তু 1 অপেক্ষা বৃহত্তর।

6. চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের সমষ্টি যে কোন বিপরীত বাহুদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর।

7. যে কোন ত্রিভুজের মধ্যমাগুলির সমষ্টি উহার পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। [C. U. '41. '48 Sup ; D. B. '34, W. B. '54]

8. ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি হইতে উহার অন্তঃস্থ কোন বিন্দুর দূরত্ব তিনটির সমষ্টি ত্রিভুজের পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। [C. U. '39]

9. চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় একত্রযোগে উহার অর্ধপরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর। [C. U. '43]

10. চতুর্ভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি হইতে উহার অন্তঃস্থ যে কোন বিন্দুর দূরত্বগুলির সমষ্টি উহার অর্ধপরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

11. ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি হইতে উহার অন্তঃস্থ কোন বিন্দুর দূরত্ব তিনটির সমষ্টি ত্রিভুজটির অর্ধপরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর। [C. U. '27]

12. ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি উহার অর্ধপরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

13. ABC সমবাহু ত্রিভুজের ভিতরে P যে কোন একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে $\overline{AP}$, $\overline{BP}$ ও $\overline{CP}$ সরলরেখাংশের যে কোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর।

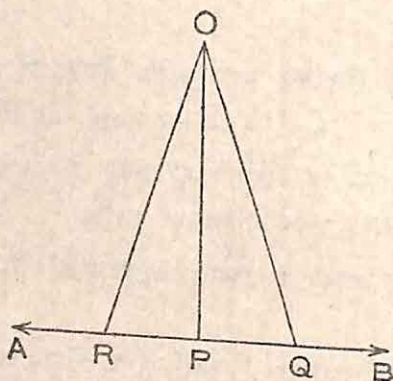
উপপাদ্য 14

§ 16. কোন সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ সরলরেখা পর্যন্ত যত সরলরেখাংশ টানা যায়, তন্মধ্যে লম্বই ক্ষুদ্রতম।

$\overleftrightarrow{AB}$ একটি সরলরেখা এবং O উহার বহিঃস্থ একটি বিন্দু। O হইতে $\overleftrightarrow{AB}$-র উপর লম্ব $\overline{OP}$ এবং অন্য যে কোন একটি রেখাংশ $\overline{OQ}$ টানা হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $|OP| < |OQ|$.

প্রমাণ। OPQ ত্রিভুজের $\angle OPQ$ একটি সমকোণ,

$\therefore$ $\angle OQP$ একটি সূক্ষ্মকোণ।

চিত্র 64

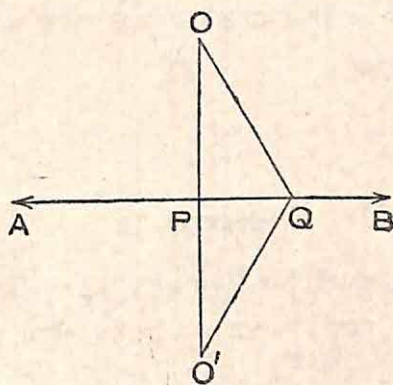
$\therefore \angle OQP \angle OPQ$, $\therefore$ $|OP| < |OQ|$ (উপ. 12)

এক্ষণে, দেখা গেল যে O হইতে $\overleftrightarrow{AB}$ পর্যন্ত অঙ্কিত যে কোন সরলরেখাংশ অপেক্ষা লম্বটি ক্ষুদ্রতর।

অতএব, $\overline{OP}$ লম্বটিই O হইতে $\overleftrightarrow{AB}$ পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখাংশগুলির মধ্যে ক্ষুদ্রতম।

দ্রষ্টব্য। (i) কোন বহিঃস্থ বিন্দু হইতে কোন সরলরেখার উপর যতগুলি সরলরেখা টানা যায়, তন্মধ্যে যেটি ক্ষুদ্রতম সেইটিই ঐ সরলরেখার উপর লম্ব।

(ii) O হইতে $\overleftrightarrow{AB}$ পর্যন্ত অঙ্কিত রেখাগুলির মধ্যে $\overline{OP}$ হইল লম্ব এবং $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$ প্রভৃতি অন্য রেখাকে তির্যক রেখা (oblique) বলে [চিত্র 64 দেখ]।

[বিকল্প প্রমাণ]

চিত্র 65

সমতলের বিন্দুগুলিকে $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখায় প্রতিফলিত কর।
মনে কর, O´ বিন্দু O বিন্দুর প্রতিবিম্ব। OO´ যোগ কর।
মনে কর, $\overline{OO'}$, $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখাকে P বিন্দুতে ছেদ করিল।
$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}$, $\overline{OO'}$ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক।
$\therefore$ $| OP | = | O P | = \frac{1}{2} | OO' |$
মনে কর, Q, $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার অন্য একটি বিন্দু।

QO ও QO′ যোগ কর। $\triangle QOO'$ হইতে পাই

$|QO| + |QO'| > |OO'|$ ...(1)

যেহেতু Q প্রতিফলনরেখার একটি বিন্দু,

$\therefore$ $|OQ| = |O'Q|$ $\therefore$ (1) হইতে পাই,

$2|OQ| > 2|OP|$ $\therefore$ $|OQ| > |OP|$

সুতরাং O হইতে $\overleftrightarrow{AB}$ পর্যন্ত অঙ্কিত অন্য যে কোন সরলরেখাংশ অপেক্ষা লম্বটি ক্ষুদ্রতর।

অতএব $\overline{OP}$ লম্বটিই O হইতে $\overleftrightarrow{AB}$ পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখাংশ-গুলির মধ্যে ক্ষুদ্রতম।

প্রশ্নমালা 12

1. $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখা হইতে X বিন্দুর দূরত্ব 12 সে. মি. এবং $\overleftrightarrow{AB}$-র উপর $\overline{XZ}$ একটি তির্যক রেখা। $|YZ| = 9$ সে. মি. হইলে, মাপিয়া $\overline{XZ}$-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

2. কোন ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে ভূমি পর্যন্ত যত সরলরেখা টানা যায়, তাহাদের প্রত্যেকটি ত্রিভুজের অপর বাহুদ্বয়ের বৃহত্তরটি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

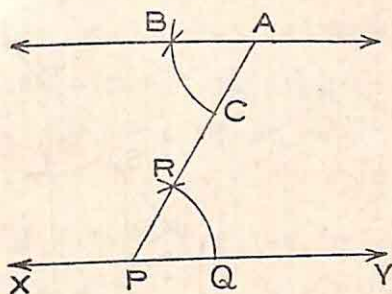
3. একটি ত্রিভুজের কোন বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমা হইতে ঐ বাহুর প্রান্তদ্বয় সমদূরবর্তী।

4. কোন সরলরেখাংশের প্রান্তবিন্দুদ্বয় উহার মধ্যবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখা হইতে সমদূরবর্তী।

চতুর্থ অধ্যায়

§ 17. একটি সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন :

সম্পাদ্য 1

কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল একটি সরলরেখা অঙ্কিত করিতে হইবে।

চিত্র 66

$\overleftrightarrow{XY}$ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং A একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। A বিন্দু দিয়া $\overleftrightarrow{XY}$-এর সমান্তরাল একটি সরলরেখা অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। $\overleftrightarrow{XY}$-এর উপর একটি বিন্দু P লইয়া AP যোগ কর। $\overline{PA}$ রেখাংশের A বিন্দুতে $\angle APY$-এর সর্বসম এবং একান্তর $\angle BAP$ অঙ্কিত কর।

$\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখা $\overleftrightarrow{XY}$-এর সমান্তরাল হইল।

(সপ্তম শ্রেণীতে শিখিয়াছ)

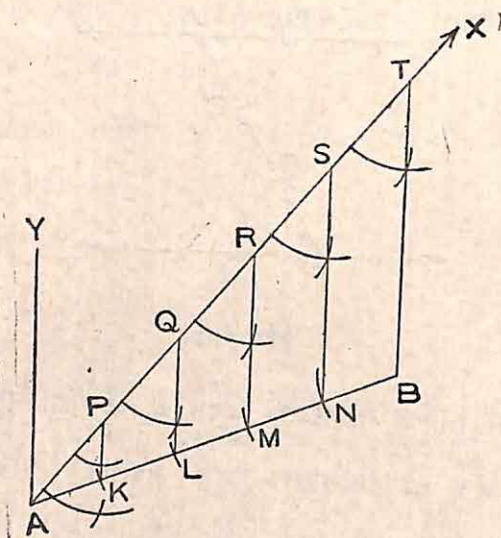
প্রমাণ। $\because$ $\angle BAP \cong \angle APY$ এবং ইহারা একান্তর কোণ,

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{XY}$ সমান্তরাল।

§ 18. সরলরেখাংশকে কয়েকটি সমান অংশে বিভক্তকরণ :

সম্পাদ্য 2

একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাংশকে কতিপয় সমান অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

প্রথম প্রণালী

চিত্র 67

$\overline{AB}$ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাংশ। মনে কর, ইহাকে পাঁচটি সমান অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

অঙ্কন। $\overline{AB}$-রেখাংশের A বিন্দুতে কোন একটি কোণ BAX অঙ্কিত কর। $\overrightarrow{AX}$ হইতে $\overline{AP}$, $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$ ও $\overline{ST}$ যে কোন দৈর্ঘ্যের পাঁচটি সমান অংশ কাটিয়া লও। TB যোগ কর।

S, R, Q, P হইতে TBর সমান্তরাল যথাক্রমে $\overrightarrow{SN}$, $\overrightarrow{RM}$,

$\overrightarrow{QL}$, $\overrightarrow{PK}$ রশ্মিগুলি টান। উহারা যেন $\overline{AB}$কে যথাক্রমে N, M, L, K বিন্দুতে ছেদ করিল।

এক্ষণে, $\overline{AB}$ সরলরেখাংশ K, L, M, N বিন্দুতে সমান পাঁচ অংশে বিভক্ত হইল।

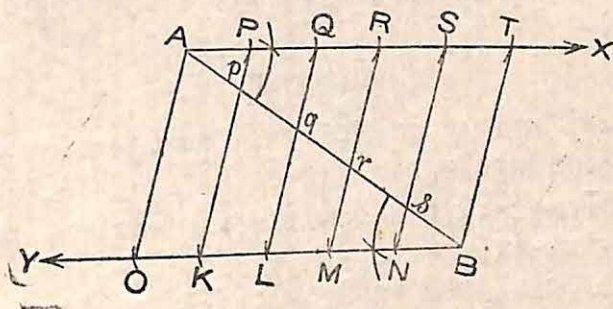
প্রমাণ। $\overleftrightarrow{AY} \parallel \overline{BT}$ টান।

$\because$ $\overrightarrow{AY}$, $\overline{PK}$, $\overline{QL}$, $\overline{RM}$, $\overline{SN}$, $\overline{TB}$ সমান্তরাল রেখাগুলি $\overrightarrow{AX}$ ভেদক হইতে পাঁচটি সমান অংশ ছেদ করিয়াছে,

$\therefore$ উহারা $\overline{AB}$ ভেদক হইতেও পাঁচটি সমান অংশ ছেদ করিয়াছে।

অতএব, $\overline{AB}$ সরলরেখাংশ K, L, M ও N বিন্দুতে পাঁচটি সমান অংশে বিভক্ত হইয়াছে।

দ্বিতীয় প্রণালী

চিত্র 68

মনে কর, $\overline{AB}$ সরলরেখাংশকে পাঁচটি সমান অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

অঙ্কন। A বিন্দুতে কোন একটি কোণ BAX অঙ্কিত কর এবং B বিন্দু হইতে $\overrightarrow{AX}$-এর সমান্তরাল $\overrightarrow{BY}$ সরলরেখা টান।

$\overrightarrow{AX}$ হইতে যে কোন দৈর্ঘ্যের $\overline{AP}$, $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$ ও $\overline{ST}$ পাঁচটি সমান অংশ কাটিয়া লও এবং $\overrightarrow{BY}$ হইতে ঐ দৈর্ঘ্যের $\overline{BN}$, $\overline{NM}$, $\overline{ML}$, $\overline{LK}$ ও $\overline{KO}$ পাঁচটি সমান অংশ কাটিয়া লও। PK, QL, RM ও SN যোগ কর; ইহারা যেন $\overline{AB}$কে যথাক্রমে p, q, r ও s বিন্দুতে ছেদ করিল।

এক্ষণে, $\overline{AB}$ সরলরেখাংশ p, q, r ও s বিন্দুতে পাঁচটি সমান অংশে বিভক্ত হইল। AO এবং BT যোগ কর।

প্রমাণ। $\because$ অঙ্কন অনুসারে $\overline{AP}$ এবং $\overline{OK}$ সর্বসম ও সমান্তরাল,

$\therefore$ $\overline{AO}$ ও $\overline{PK}$ সর্বসম ও সমান্তরাল।

অনুরূপে, $\overline{PK} \parallel \overline{QL}$, $\overline{QL} \parallel \overline{RM}$, $\overline{RM} \parallel \overline{SN}$ এবং $\overline{SN} \parallel \overline{TB}$.

অতএব, $\overline{AO}$, $\overline{PK}$, $\overline{QL}$, $\overline{RM}$, $\overline{SN}$ ও $\overline{TB}$ পরস্পর সমান্তরাল এবং উহারা $\overline{AT}$কে সমান পাঁচ ভাগে বিভক্ত করিয়াছে।

$\therefore$ উহারা $\overline{AB}$কে p, q, r, s বিন্দুতে সমান পাঁচ ভাগে বিভক্ত করিয়াছে।

প্রশ্নমালা 13

1. একটি প্রদত্ত সরলরেখা হইতে 3 সে.মি. দূরে ঐ সরলরেখার সমান্তরাল একটি সরলরেখা অঙ্কিত কর।

2. $\overline{AB}$ রেখাংশের দৈর্ঘ্য 10 সে.মি., উহাকে (i) সমান 4টি ও (ii) সমান 5টি অংশে বিভক্ত কর।

3. $\triangle ABC$-র $\overline{AB}$ বাহুর মধ্যবিন্দু D হইতে $\overline{BC}$-র সমান্তরাল করিয়া একটি সরলরেখা অঙ্কন কর।

মনে কর, সরলরেখাটি $\overline{AC}$ বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। E বিন্দু $\overline{AC}$-র মধ্যবিন্দু কিনা মাপিয়া দেখ।

4. 3 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ লও এবং উহার প্রত্যেক শীর্ষবিন্দু দিয়া বিপরীত বাহুর সমান্তরাল রেখা টান। ইহাতে যে ত্রিভুজটি উৎপন্ন হইল তাহার বাহুর দৈর্ঘ্য কত?

9703

পরিশিষ্ট

বস্তুভিত্তিক আদর্শ প্রশ্নাবলী (Objective Model Questions)

মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ গণিত শিক্ষার জন্য বস্তুভিত্তিক বা বিষয়মুখী প্রশ্নাবলীর মাধ্যমে শিক্ষাকে গুরুত্ব দিয়াছেন। এই বিষয়মুখী (objective) প্রশ্নগুলি পাঠ্যক্রমের যে কোন বিষয় হইতেই থাকিতে পারে। পাঠ্যবস্তু যথাযথভাবে আয়ত্ত করিলে বিষয়মুখী প্রশ্নের উত্তর দেওয়া মোটেই কঠিন নহে। সাধারণ প্রশ্ন কিভাবে বিষয়মুখী হয় তাহার কয়েকটি নমুনা নিম্নে দেওয়া হইল।

পাটীগণিত

1. নীচের ভগ্নাংশগুলিকে ছোট থেকে বড় হিসাবে সাজাও। সবচেয়ে বড় এবং সবচেয়ে ছোট ভগ্নাংশটি বাহির কর।

$$\frac{3}{5},\ \frac{5}{7},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{2}.$$

সমাধান : 2, 3, 5, 7এর ল. সা. গু. $=210$.

$$\frac{3}{5}=\frac{126}{210}\ ;\ \frac{5}{7}=\frac{150}{210}\ ;\ \frac{2}{3}=\frac{140}{210}\ ;\ \frac{1}{2}=\frac{105}{210}.$$

$\therefore$ ভগ্নাংশগুলিকে ছোট হইতে বড় হিসাবে নিম্নরূপে সাজান যায়।

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{7}.$$

সুতরাং সবচেয়ে ছোট ভগ্নাংশটি $=\frac{1}{2}$

এবং " বড় " $=\frac{5}{7}$.

2. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 'a' এবং তাহাদের অন্তর 'b' হইলে, সংখ্যা দুইটি কি কি?

সমাধান : বড় সংখ্যা + ছোট সংখ্যা $=a \cdots$(i)

এবং বড় সংখ্যা − ছোট সংখ্যা $=b. \cdots$(ii)

যোগ করিয়া, 2 (বড় সংখ্যা) $=a+b$,

$\therefore$ বড় সংখ্যা $=\dfrac{a+b}{2}$,

এবং (i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া, ছোট সংখ্যা $=\dfrac{a-b}{2}$.

3. 0003∗4-এর লুপ্ত অংকটি কত হইলে সংখ্যাটি পূর্ণবর্গ হইবে ?

$$
\begin{array}{r|l}
 & \cdot 000\dot{3}*\dot{4} \quad | \cdot 018 \\
 & 1 \\
\hline
28 & 2*4 \\
 & 224 \\
\hline
\end{array}
$$

∴ নির্ণেয় লুপ্ত অঙ্কটি '2'.

4. একটি গাড়ীর চাকার ব্যাস 'd' ফুট। যদি চাকাটি প্রতি মিনিটে 128 বার ঘোরে তাহা হইলে গাড়ীটি ঘণ্টায় কত মাইল যাইবে ? ($\pi = \frac{22}{7}$) নিম্নের উত্তরগুলির মধ্যে সঠিক উত্তর বাহির কর :—

(i) $\frac{32d}{7}$ মা. (ii) $\frac{40d}{7}$ মা (iii) $\frac{51d}{8}$ মা

সমাধান : গাড়ীটি এক বার ঘুরিয়া যায় $= \pi d$ ফুট

$= \frac{22}{7} \times d$ ফুট

∴ 1 মিনিটে যায় $= \frac{22}{7} \times d \times 128$ ফুট

∴ 60 „ „ $= \frac{22}{7} \times d \times 128 \times 60$ ফুট

সুতরাং 1 ঘণ্টায় যায় $\frac{22}{7} \times d \times 128 \times 60$ ফুট

$= \frac{22}{7} \times \frac{d \times 128 \times 60}{3 \times 1760}$ মাইল

$= \frac{32d}{7}$ মাইল

∴ (i)টি অর্থাৎ $\frac{32d}{7}$ মাইল সঠিক উত্তর হইবে।

5. যদি প্রতিদিন 'x' ঘণ্টা করিয়া খাটিলে একটি রাস্তা তৈয়ারী করিতে 'a' জন লোকের 'p' মাস লাগে, তবে প্রতিদিন 'y' ঘণ্টা করিয়া খাটিলে 'b' জন লোকের কত সময় লাগিবে ? নিম্নের উত্তরগুলির মধ্যে কোন্‌টি সঠিক উত্তর নির্দেশ কর :—

(i) $\frac{apx}{by}$ (ii) $\frac{abp}{xy}$ (iii) $\frac{pxy}{ab}$

6. রবিবার হইতে আরম্ভ করিয়া কোন এক সপ্তাহে কোন স্থানের গড় মধ্যাহ্ন উত্তাপ 73·9° ছিল। ঐ সপ্তাহের প্রথম 3 দিনের ঐ গড় 73·6° এবং শেষ 3 দিনের গড় 73·7° হইলে, ঐ সপ্তাহের বুধবারের মধ্যাহ্ন উত্তাপ কত ছিল? নিম্নের উত্তরগুলির মধ্যে কোন্‌টি সঠিক উত্তর বল :—

(i) 75·4° (ii) 74·9° (iii) 83·8°.

সমাধান : 7 দিনের মোট তাপ $=73·9° \times 7=517·3°$

প্রথম 3 দিনের মোট তাপ $=73·6° \times 3=220·8°$

শেষ 3 " " " $=73·7° \times 3=221·1°$.

$\therefore$ বুধবারের তাপ $=\{517·3-(220·8+221·1)\}°=75·4°$

$\therefore$ (i)টি অর্থাৎ 75·4° সঠিক উত্তর হইবে।

7. একটি বর্গাকার মাঠের ক্ষেত্রফল x^2 বর্গ গজ। উহার চতুর্দিকে বেড়া দিয়া ঘিরিতে প্রতি গজ a টাকা হিসাবে কত খরচ হইবে? সঠিক উত্তরটি বল :—

(i) $\frac{4a}{x}$ টাকা (ii) $4ax$ টাকা (iii) $\frac{4x}{a}$ টাকা।

8. যদি কোন আসল Pএর $r\%$ সুদের হারে N বৎসরের সুদ I হয়, তবে নিম্নের কোন্ সমীকরণটি শুদ্ধ বল :—

(i) $I=\frac{P \times r \times N}{100}$ (ii) $I=P \times r \times N$.

(iii) $I=\frac{P \times r\% \times N}{100}$

সমাধান : 100 টাকার 1 বৎসরের সুদ r টাকা

" " N " " $r \times N$ টাকা

P " " " " $\frac{P \times r \times N}{100}$ টাকা

অতএব, (i) অর্থাৎ $I=\frac{P \times r \times N}{100}$ সমীকরণটিই শুদ্ধ হইবে।

বীজগণিত

1. শূন্যস্থান পূরণ কর :

(a) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2a(b+c)+\cdots$

(b) $(x^4+x^2+1)=(x^2-x+1)\times(\cdots+\cdots+\cdots)$

(c) $x^2-9y^2=(\cdots+\cdots)(x-3y)$

2. বন্ধনীর মধ্যে কি বসাইলে $x^2+4y^2+z^2+4xy+(\quad)-4yz$, একটি পূর্ণবর্গে পরিণত হইবে ?

সমাধান : রাশিটি $=x^2+(2y)^2+z^2+4xy-4yz+(\quad)$

$=x^2+(2y)^2+(-z)^2+2.x.2y+2.2y.(-z)+2.x.(-z)$

$=x^2+(2y)^2+(-z)^2+4xy-4yz-2xz$

$=(x+2y-z)^2$, ইহা পূর্ণবর্গ।

$\therefore$ বন্ধনীর মধ্যে $(-2xz)$ বসাইতে হইবে।

3. যদি $(x-1)^2+(y-5)^2+(z-7)^2=0$ হয়, তবে, x, y এবং zএর মান কত হইবে ?

সমাধান : এখানে বামপক্ষের প্রত্যেক পদ পূর্ণবর্গ বলিয়া ধনাত্মক। যেহেতু তিনটি ধনাত্মক রাশির যোগফল শূন্য, অতএব প্রত্যেকটি রাশি পৃথক্‌ভাবে শূন্য হইবে।

$\because$ $(x-1)^2=0$, $\therefore$ $x-1=0$, বা, $x=1$;

$(y-5)^2=0$, $\therefore$ $y-5=0$, বা, $y=5$;

এবং $(z-7)^2=0$, $\therefore$ $z-7=0$, বা, $z=7$.

$\therefore$ নির্ণেয় মান, $x=1$, $y=5$, $z=7$.

4. 'a'-এর মান কত হইলে x^2+8+a^2 একটি পূর্ণবর্গ হইবে ?

5. শূন্যস্থান পূরণ কর :

$(2x+3)^3=8x^3+\cdots+\cdots+27.$

6. তিন অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার একক, দশক এবং শতকের অঙ্ক যথাক্রমে x, y, z হইলে, সংখ্যাটি কত ?

7. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কগুলির সমষ্টি 11 ; উহার বামদিকের অঙ্কটি 2 বৃদ্ধি হইলে উহা (অঙ্কটি) সংখ্যাটির $\frac{1}{8}$ হইবে। সঠিক সংখ্যা নিম্নের কোন্‌টি নির্ণয় কর :

(i) 46 (ii) 56 (iii) 66.

সমাধান ঃ ধরা যাক, সংখ্যাটি, $10y+x$.

$\therefore$ শর্তানুসারে, $x+y=11 \cdots\cdots(1)$

এবং $y+2=\frac{1}{8}(10y+x) \cdots\cdots (2)$

(2) হইতে পাই $8y+16=10y+x$, বা, $2y+x=16 \cdots\cdots(3)$

(1) ও (3) সমাধান করিলে পাই $x=6$, $y=5$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=5\times10+6=56$.

সুতরাং (ii)টি অর্থাৎ 56 সঠিক সংখ্যা।

8. তিনটি ক্রমিক অঙ্ক দ্বারা একটি সংখ্যা গঠিত। ঐ অঙ্কগুলি উল্টাইয়া লিখিলে সংখ্যাদ্বয়ের অন্তরফল বৃহত্তম অঙ্কটির 33 গুণ হয়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরা যাক, শতকের অঙ্ক x, সুতরাং দশকের অঙ্ক $x+1$, এবং এককের অঙ্ক $x+2$.

$\therefore$ সংখ্যাটি $=100x+10(x+1)+(x+2)=111x+12$

প্রদত্ত দ্বিতীয় শর্ত হইতে পাওয়া যায়,

$\{100(x+2)+10(x+1)+x\}-(111x+12)=33(x+2)$

বা, $111x+210-111x-12=33x+66$

বা, $33x=132$. $\therefore$ $x=4$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=4\times111+12=456$.

জ্যামিতি

1. উপযুক্ত শব্দ দ্বারা শূন্যস্থান পূরণ কর :—

(a) দুইটি কোণের পরিমাপের যোগফল 90° হইলে কোণ দুইটিকে পরস্পর — কোণ বলা হয়।

(b) দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে উৎপন্ন কোণ চারিটির সমষ্টি — সমকোণ।

(c) — ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমিকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(d) একটি ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুকে উভয়দিকে বর্ধিত করিলে বহিঃস্থ কোণ ছয়টির সমষ্টি — সমকোণ হইবে।

(e) 'n' সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট কুব্জ বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি — সমকোণ।

(f) কোন চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান হইলে উহা একটি — হইবে।

(g) — কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(h) কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ইহার — বাহু।

(i) ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর অন্তরফল তৃতীয় বাহু অপেক্ষা —।

(j) যদি PQRSTN একটি সুষম ষড়্ভুজ হয়, তবে PRT একটি — ত্রিভুজ হইবে।

2. **নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির সংক্ষেপে উত্তর দাও :—**

(a) একটি কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং বহির্দ্বিখণ্ডকের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ কত ?

(b) একটি সামান্তরিকের কোন কর্ণ সামান্তরিককে যে দুইটি অংশে বিভক্ত করে তাহাদের মধ্যে কি সম্পর্ক ?

(c) একটি সামান্তরিকের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি কত ?

(d) একটি কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত কোন বিন্দুর ঐ কোণসংলগ্ন বাহু দুইটির সঙ্গে কি সম্পর্ক ?

(e) ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করিলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণটি কাহার সহিত সমান হইবে ?

(f) একটি সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করিলে কি কি সিদ্ধান্ত জানা যায় ?

(g) কোন ত্রিভুজের মধ্যমাগুলির সমষ্টির সহিত উহার পরিসীমার কিরূপ সম্পর্ক ?

(h) কোন ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় কি সমবিন্দু ?

[দ্রষ্টব্য : জ্যামিতির বিষয়মুখী প্রশ্নাবলীর বিভিন্ন প্রকারের কিছু কিছু নমুনা প্রত্যেক অধ্যায়ের প্রশ্নমালায় সন্নিবেশিত হইয়াছে। এই প্রসঙ্গে মনে রাখা প্রয়োজন যে, যে কোন উপপাদ্য এবং স্বতঃসিদ্ধকে বিষয়মুখী প্রশ্নাকারে রূপান্তরিত করা যাইতে পারে। ছাত্রদের সুবিধার জন্য কিছু নমুনা উপরে আলোচনা করা হইয়াছে।]

উত্তরমালা

পাটীগণিত :

5. $\frac{apx}{by}$ মাস 7. $4ax$ টাকা।

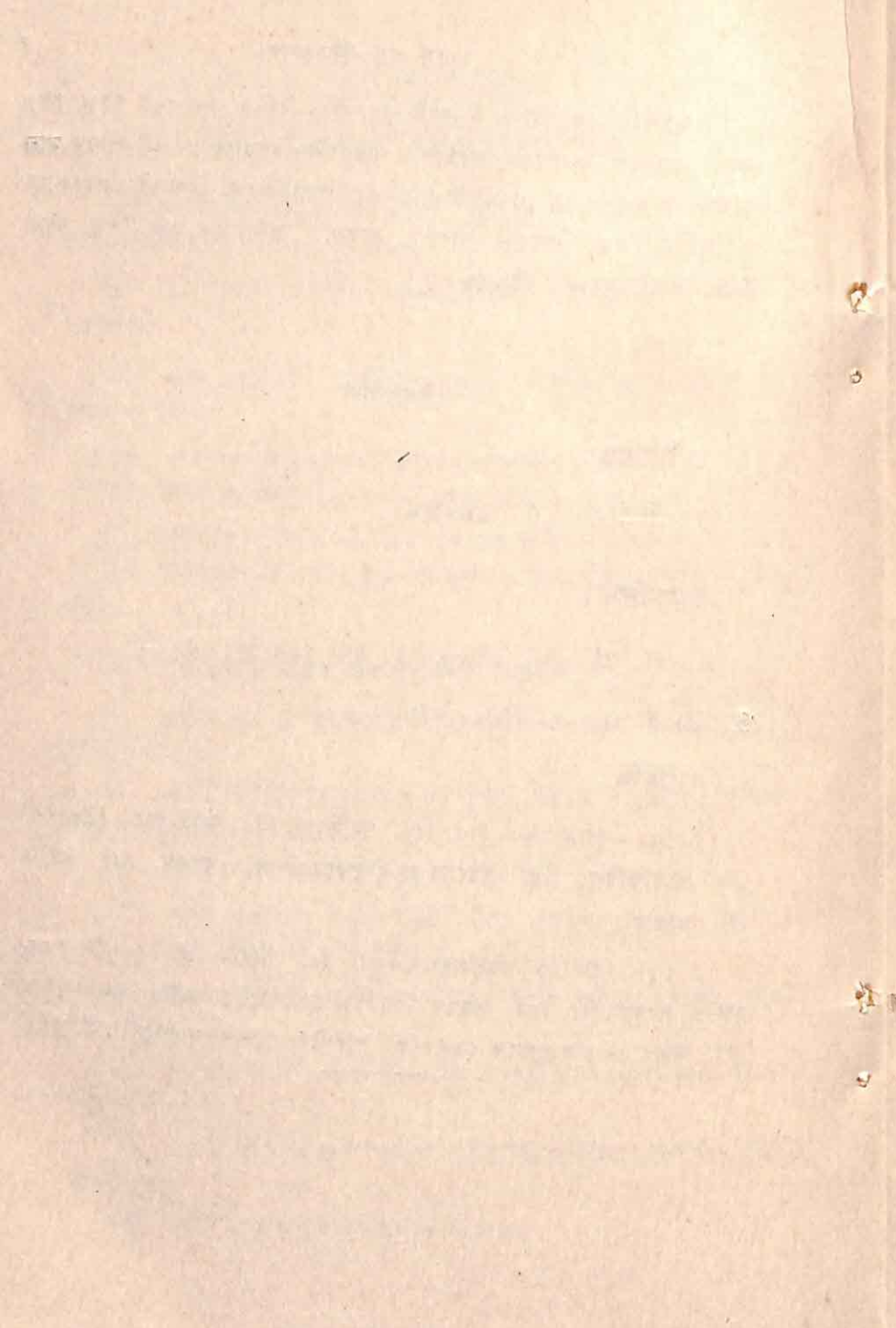
বীজগণিত :

1. (a) $2bc$ (b) x^2+x+1 (c) $(x+3y)$ 4. $\frac{4}{x}$

5. $36x^2, 54x$ 6. $100z+10y+x$.

জ্যামিতি :

1. (a) পূরক, (b) চার, (c) সমদ্বিবাহু, (d) আট, (e) $(2n-4)$, (f) সামান্তরিক, (g) রম্বসের বা বর্গক্ষেত্রের, (h) বৃহত্তম, (i) ক্ষুদ্রতর (j) সমবাহু।

2. (a) 90° (b) ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম, (c) 360° (d) বিন্দুটি বাহুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী, (e) অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান হইবে, (f) উত্তর তোমার পুস্তকে দেখ, (g) পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, (h) হাঁ।

প্রাচীনকালের গণিত ও গণিতজ্ঞদের বিষয়ে আলোচনা

প্রাচীন ভারতে গণিত ও গাণিতিক

ইতিহাস-জিজ্ঞাসা আধুনিক সভ্যতার একটি বিশিষ্ট লক্ষণ। যে জাতি জাতীয় জীবনের আদিপর্বে সম্পূর্ণ উদাসীন, সে জাতি জীবন গঠনের যথার্থ পথ খুঁজিয়া পায় না। তাই জাতীয় জীবনে সকল চেতনার শ্রেষ্ঠ চেতনা ইতিহাস-চেতনা।

প্রখ্যাত বিদগ্ধদের মতে যে গণিত সকল বিজ্ঞানের বিজ্ঞাতা, আধুনিক দর্শন ও সভ্যতার বাহন, মানবিক জীবনে প্রতিপদে ও বিজ্ঞানের সর্বশাখায় প্রযুক্ত, যে গণিত 'সকল বিজ্ঞানের রাণী' ও 'বিজ্ঞানের সেবক', সেই গণিতশাস্ত্র চর্চায় প্রাচীন ভারতের অবদান কি ছিল সেই ইতিহাসই এখানে সংক্ষিপ্ত ভাবে পর্যালোচনা করা হইতেছে।

পৃথিবীর অন্যান্য দেশের প্রতিতুলনায় গণিতশাস্ত্রের অনুশীলনে ভারতবর্ষই পথিকৃৎ। মিশর, ব্যাবিলন, মেসোপটেমিয়া, চীন প্রভৃতি দেশে প্রাচীনকাল হইতে গণিতের অনুশীলন চলিলেও কালের গণনায় প্রাচীন ভারতের দাবি সর্বাগ্রগণ্য। ভারতে গণিতচর্চার সূত্রপাতের সঠিক লগ্ন নিরূপণে পর্বতপ্রমাণ বাধা থাকিলেও সিন্ধুনদের অববাহিকা অঞ্চলে সুপরিকল্পিত প্রাচীন নাগরিক সভ্যতার ধ্বংসাবশেষ মহেঞ্জোদাড়ো ও হরাপ্পা আবিষ্কৃত হওয়ায় একথা প্রমাণিত হইয়াছে যে বৈদিক যুগের বহুপূর্বে এবং খ্রীষ্টজন্মের তিন সহস্র বৎসর পূর্বে ভারতে এক অভিজাত মানের সভ্যতা গড়িয়া উঠিয়াছিল। গণিতশাস্ত্র চর্চা ও সংখ্যার প্রয়োগে লিখন প্রণালী সেই সভ্যতার অজ্ঞাত ছিল না।

ভারতের আর্যঋষিরা অধ্যাত্মশাস্ত্রের সহিত গণিত শাস্ত্রেরও চর্চা করিতেন। অনেক আচার্য গণিতশাস্ত্রের গবেষণায় প্রখ্যাত-কীর্তি। পৃথিবীর প্রাচীনতম গ্রন্থ **বেদে** স্তূপ ও যজ্ঞবেদী নির্মাণে, যন্ত্র-প্রতীকাদির রচনায় গণিত শাস্ত্রের বহুল প্রয়োগ দেখা যায়। **ব্রাহ্মণেও** (খৃঃ পূঃ 200) দেখা যায় ভারত গণিত শাস্ত্রে, বিশেষতঃ পাটীগণিত, জ্যোতি-বিদ্যা, জ্যামিতি বা রেখাগণিতে প্রাগ্রসর। বৈদিক সাহিত্যে একাধিক স্থানে গণিতকে ময়ূরের মাথার শিখার ন্যায়, সাপের মাথার মণির ন্যায় তুলনা করা হইয়াছে ও সকল বিজ্ঞানের শীর্ষস্থানে গণিতের অবস্থিতি বলিয়া বর্ণিত হইয়াছে। খৃঃ পূঃ ৪00 অব্দে হিন্দ **'শুল্ক-সূত্রে'** পীথাগোরাসের উপপাদ্য নামে যাহা প্রচলিত, তাহারও প্রয়োগ দেখা যায়। **মহাভারতে**ও গণিতের ও সংখ্যার প্রচুর উল্লেখ পাওয়া যায়। **'ললিত-বিস্তার'** গ্রন্থে উল্লিখিত আছে, ভগবান বুদ্ধ পাটীগণিতে দক্ষ ছিলেন। খ্রীঃ পূঃ 400 হইতে খ্রীষ্টাব্দ 400 (মৌর্য—গুপ্তযুগ) অব্দে গণিতশাস্ত্র, বিজ্ঞান ও সাহিত্যের প্রচুর প্রসার ও উন্নতি ঘটে। জ্যোতিবিদ্যার প্রখ্যাত গ্রন্থ **'সূর্যসিদ্ধান্ত'**ও সমকালীন (আনুমানিক 400 খ্রীঃ) গ্রন্থ। সমসাময়িক গ্রন্থ **'পৌলিশ সিদ্ধান্তে'** প্রাচীন ভারতে ত্রিকোণমিতির সারাংশ লিপিবদ্ধ হইয়াছে দেখা যায়।

ব্রাহ্মী সংখ্যা ও ব্রাহ্মী লিপি, স্বাভাবিক সংখ্যার লিখন প্রণালীর প্রচলন, দশমিক সংখ্যার উদ্ভাবন ও শূন্যের (0) প্রকাশনা ভারতীয় হিন্দ গণিতজ্ঞদেরই **প্রথম আবিষ্কৃতি**। ব্যাবিলনীয়, মিশরীয়, গ্রীক গণিতেও শূন্যের ব্যবহার ছিল না। ভারতের আচার্যগণ বিরাট বিরাট সংখ্যার নামকরণ করিয়াছেন, যেমন—প্রযুত, অর্বুদ, ন্যর্বুদ, সমুদ্র, মধ্য, অন্ত, পরার্ধ ইত্যাদি। ইহা অন্য কোথাও নাই। গ্রীকদের গণিতে মিরিয়াড় অর্থাৎ দশ হাজারের উপরে আর সংখ্যার নামকরণ নাই।

ভারতের প্রাচীন ঐতিহ্য ও ইতিহাস আমরা সন্ধান করি না বলিয়াই আমাদের জ্ঞান পরিপূর্ণ হয় না ও উহা নিতান্ত আগন্তুক অতিথির ন্যায় অনাত্মীয় থাকিয়া যায়। প্রাচীন ভারতের গণিত-ইতিহাসের আলোচনা জ্ঞানকে উদ্বুদ্ধ করিবে, অনুসন্ধিৎসা বাড়াইবে, ভারতের ঐতিহ্যের প্রতি শ্রদ্ধাশীল করিবে এবং গণিত অধ্যয়নে প্রেরণা ও শক্তি যোগাইবে।

জীবনী ও চরিতপাঠের উপযোগিতাও অনস্বীকার্য। মনীষী ও মহাপুরুষদের জীবনী পাঠে উৎসাহ উদ্দীপনা পাওয়া যায় এবং নূতন প্রেরণা ও নব নব আগ্রহের সৃষ্টি হয়। সেই কারণে কতিপয় প্রখ্যাত গাণিতিকের সংক্ষিপ্ত জীবনী বিবৃত হইল।

1. **প্রথম আর্যভট**ঃ স্বনামখ্যাত আর্যভট ভারতের শ্রেষ্ঠ গণিতজ্ঞ ও জ্যোতিবিদ-গণের অন্যতম। গুপ্তযুগে পাটনার এক গ্রামে (কুসুমপুর) খুব সম্ভব 476 খ্রীষ্টাব্দে তিনি জন্মগ্রহণ করেন। তাঁহার রচিত গ্রন্থগুলির মধ্যে **'আর্যভটীয়'** গ্রন্থে 121টি শ্লোকে পাটীগণিত ও অন্যান্য গণিত, কাল ও ক্ষেত্রবিভাগ, গ্রহ ও গোলক সম্বন্ধে বর্ণিত হইয়াছে, অর্থাৎ ইহাতে বিশুদ্ধ গণিত এবং জ্যোতিবিদ্যা ও তৎসংক্রান্ত গণিত আলোচিত হইয়াছে। আর্যভট তাঁহার পুস্তকে 10 গুণোত্তর সংখ্যা 10^8 পর্যন্ত ধরিয়াছেন, ইহাতে বর্গমূল ও ঘনমূল নির্ণয়, সমান্তর শ্রেণীর যোগফল নির্ণয়, দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান, π-এর মান নির্ণয় প্রভৃতি বিষয়ে আলোচনা করিয়াছেন।

তোমরা জানিয়া গর্বিত হইবে যে ইনিই সর্বপ্রথম পৃথিবীর সূর্যকে প্রদক্ষিণ ও 'আহ্নিক গতি'র কথা প্রচার করেন এবং চন্দ্র ও সূর্য গ্রহণের বৈজ্ঞানিক কারণ নির্ণয় করেন। অক্ষর দ্বারা সংখ্যা প্রকাশের এক অভিনব পদ্ধতি উদ্ভাবন করেন। অনেকের মতে বৃত্তের পরিধির সহিত ব্যাসের অনুপাত (π) তিনিই সর্বপ্রথম নির্ণয় করেন। তিনি স্বাভাবিক সংখ্যাগুলির বর্গসমূহের ও ঘনসমূহের যোগফল নির্ণয় প্রণালী নির্ধারণ করেন।

তোমরা হয়ত ভাবিবে ইহাকে প্রথম আর্যভট কেন বলা হয়। মজার কথা এই যে পরবর্তীকালে আর এক জ্যোতিবিদ্ প্রাচীন আর্যভটের প্রসিদ্ধি দেখিয়া তাঁহার **আর্যসিদ্ধান্ত** নামক জ্যোতিষগ্রন্থ যাহাতে খ্যাতিলাভ করে এই উদ্দেশ্যে আর্যভট এই ছদ্মনাম গ্রহণ করেন। এই দ্বিতীয় আর্যভট হইতে পৃথক করিবার জন্য প্রাচীন আর্যভটকে প্রথম আর্যভট বলা হয়।

2. **ব্রহ্মগুপ্ত**ঃ ব্রহ্মগুপ্ত ভারতের একজন প্রসিদ্ধ জ্যোতির্বিদ ও বীজগণিতাচার্য। অনেকের মতে তিনি 598 খ্রীষ্টাব্দে জন্মগ্রহণ করেন। কাহারও মতে মুলতান প্রদেশে আবার কাহারও মতে উত্তর গুর্জরে তাঁহার নিবাস ছিল। তাঁহার **'ব্রহ্মস্ফুট সিদ্ধান্ত'** নামে প্রসিদ্ধ গ্রন্থে তিনি গণিত ও গোল জ্যোতিষ এবং পাটীগণিত ও বীজগণিত আলোচনা করিয়াছেন। ইঁহার বীজগণিত পরে আরব দেশের মাধ্যমে ইউরোপীয় দেশে পৌঁছায়। ব্রহ্মগুপ্ত তাঁহার পাটীগণিতে অন্যান্য বিষয়ের সহিত প্রগতি, অংশ বিভাগ, সামতলিক ক্ষেত্র সম্বন্ধে পরিমিতি এবং আয়তন বিষয়ক সমাধান আলোচনা করিয়াছেন। তাঁহার বীজগণিতে $x^2+px-q=0$ এই আকারের দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধানের সূত্র হিসাবে দিয়াছেন, $x=\frac{\sqrt{p^2+4q}-p}{2}$, ইহা হইতে অবশ্য একটি বীজ পাওয়া যায়।

সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলির তিনি দুই সেট মান দিয়াছেন, যথা—

$$2mn,\ m^2-n^2,\ m^2+n^2 \text{ এবং } \sqrt{m},\ \tfrac{1}{2}\left(\frac{m}{n}-n\right),\ \tfrac{1}{2}\left(\frac{m}{n}+n\right)$$

তোমরা পরে জ্যামিতিতে ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য নামে একটি প্রয়োজ[illegible] উপপাদ্য পড়িবে।

3. **মহাবীরাচার্য**ঃ ইঁহার জন্মের সময় বা কাল এবং জন্মস্থান সঠিকভাবে জানা যায় না। তবে ব্রহ্মগুপ্তের পরে ও শ্রীধরাচার্যের পূর্বে বলিয়াই অনুমান করা হয়। তিনি মহীশূরে বসবাস করেন। তাঁহার রচিত বিখ্যাত গ্রন্থ **'গণিত-সার-সংগ্রহ'**। এই গ্রন্থ নয়টি অধ্যায়ে বিভক্ত এবং ইহাতে পাটীগণিত, জ্যামিতি, পরিমিতি প্রভৃতি বিভিন্ন বিষয় আলোচিত হইয়াছে। এখানে উল্লেখযোগ্য এই যে ইনি ভগ্নাংশের ভাগের নিয়মটি এইভাবে বর্ণনা করিয়াছেন—"ভগ্নাংশের ভাগে ভাজকের লবকে হর ও হরকে লব করিয়া লিখিয়া তাহার দ্বারা ভাজ্য ভগ্নাংশকে গুণ করিতে হয়।"

4. **শ্রীধরাচার্য**ঃ প্রসিদ্ধ দার্শনিক পণ্ডিত শ্রীধর সম্ভবতঃ 991 খ্রীষ্টাব্দে জন্মগ্রহণ করেন। অনেকে অনুমান করেন ইনি হুগলী জেলায় জন্মগ্রহণ করেন। ইঁহার পিতার নাম বলদেবাচার্য ও মাতার নাম অচ্ছোকা দেবী। ইনি স্মার্ত শ্রীধরাচার্য হইতে ভিন্ন। ইঁহার রচিত গ্রন্থের নাম **'ত্রিশতিক'** বা **'গণিত-সার'**। ঐ গ্রন্থে তিনশত শ্লোক থাকায় উহার নামকরণ করেন ত্রিশতিক। সংখ্যা গণনা, পরিমাপ, স্বাভাবিক সংখ্যা, গুণ, ভাগ, শূন্য, বর্গফল, ঘনফল, ভগ্নাংশ, ত্রৈরাশিক, সুদ নির্ণয়, যৌথ কারবার অর্থাৎ সম্ভূয় সমুত্থান ও পরিমিতি বিষয় এই গ্রন্থে আলোচিত হইয়াছে। হিন্দু আচার্যদের মধ্যে শূন্য (0) সম্বন্ধে শ্রীধরের বিবৃতিই সর্বাপেক্ষা বিশদ। তিনি লিখিয়াছেন "কোন সংখ্যার সহিত শূন্য যোগ করিলে যোগফল সেই সংখ্যাই হয়; যদি 0 বিয়োগ করা হয় তবে সংখ্যাটির কোন পরিবর্তন হয় না, যদি 0-কে কোন সংখ্যা দ্বারা গুণ করা হয়, তবে গুণফল শূন্যই হয়।"

তিনি 0 দ্বারা ভাগ করা সম্বন্ধে কিছু বলেন নাই। কোন ভগ্নাংশকে ভাগ সম্বন্ধে তিনি ভাজকের অন্যোন্যক দ্বারা গুণ করার প্রণালী দিয়াছেন এবং তিনি বর্তমান π-এর পরিবর্তে $\sqrt{10}$ ব্যবহার করিয়াছেন। দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধানের জন্য শ্রীধরাচার্যের পদ্ধতি তোমাদের পড়িতে হইবে।

শ্রীধরই সর্বপ্রথম পাটীগণিত হইতে বীজগণিতকে পৃথক করেন।

5. **ভাস্করাচার্য**ঃ ভারতের অন্যতম জ্যোতির্বিদ ও গণিতজ্ঞ ভাস্করাচার্য সম্ভবতঃ 1114 খ্রীষ্টাব্দে দাক্ষিণাত্যে বিদার গ্রামে জন্মগ্রহণ করেন। তাঁহার পিতার নাম মহেশ দৈবজ্ঞ। ভাস্করাচার্য আনুমানিক 1150 খ্রীষ্টাব্দে **'সিদ্ধান্ত শিরোমণি'** নামক তাঁহার প্রসিদ্ধ গ্রন্থ প্রণয়ন করেন। এই গ্রন্থ (1) **লীলাবতী** (পাটীগণিত ও পরিমিতি), (2) **বীজগণিত**, (3) **গ্রহগণিতাধ্যায়** ও (4) **গোলাধ্যায়** এই চারিভাগে বিভক্ত। শেষ দুইটি গ্রন্থে তিনি বর্তুলের তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় পদ্ধতি, চন্দ্রের দ্রাঘিমা নির্ণয়, পৃথিবীর গোলত্ব ও মাধ্যাকর্ষণ শক্তির বর্ণনা করিয়াছেন।

তিনি শূন্য দ্বারা কোন সংখ্যাকে ভাগ সম্বন্ধে কোন স্পষ্ট ধারণা দেন নাই। দৃষ্টান্তস্বরূপ দিয়াছেন $10 \div 0 = \frac{10}{0}$ এবং $3 \div 0 = \frac{3}{0}$ এবং এই সঙ্গে লিখিয়াছেন, "এই ভগ্নাংশটিকে যাহার হর শূন্য, একটি অনন্ত রাশি বলা হয়।" তিনি বীজগণিতে অমূলদ সংখ্যা ব্যবহার করিয়াছেন। তিনি কাল্পনিক সংখ্যাকে স্থান না দিয়া বলিয়াছেন, "কোন ঋণাত্মক রাশির বর্গমূল হইতে পারে না, কারণ ইহা (ঐ রাশি) কোন বর্গই নহে।" তাঁহার গ্রন্থে সরল সমীকরণ ও দ্বিঘাত সমীকরণও আলোচনা করিয়াছেন। পীথাগোরাসের সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলির সম্বন্ধে ভাস্করাচার্য নিম্নরূপ দিয়াছেন—

$$\sqrt{m},\ \tfrac{1}{2}\left(\frac{m}{n} - n\right),\ \tfrac{1}{2}\left(\frac{m}{n} + n\right),\ \text{বা, } m,\ \frac{2m}{n^2-1},\ \frac{m(n^2+1)}{n^2-1}$$

$$\text{বা, } \frac{m(n^2-1)}{n^2+1},\ \frac{2mn}{n^2+1},\ m.$$

'লীলাবতী' গ্রন্থের রচয়িতা সম্বন্ধে নানা মতামত আছে। অনেকের মতে ভাস্করাচার্য তাঁহার বিদুষী কন্যা লীলাবতীর নামে গ্রন্থটির নামকরণ করেন। আবার অনেকের মতে তাঁহার কন্যা লীলাবতীই এই গ্রন্থটি রচনা করেন। ভাস্করাচার্যের গ্রন্থটির লীলাবতী নামকরণের পিছনে এক করুণ উপাখ্যান প্রচলিত আছে।

ভাস্করাচার্য গণনা করিয়া জানিতে পারেন, তাঁহার কন্যার বিবাহ হইলে পতি-বিয়োগের যোগ আছে। ইহা খণ্ডনের জন্য তিনি গণনার মাধ্যমে বিবাহের এক শুভক্ষণ নির্ধারণ করেন। সেই সময় নির্ণয় করার জন্য তিনি একটি সচ্ছিদ্র পাত্র জলে এমন হিসাব করিয়া ভাসাইয়া দেন যে ঐ ছিদ্রের মধ্য দিয়া জল প্রবেশ করিয়া পাত্রটিকে ডুবাইলেই ঐ নির্দিষ্ট সময় উপস্থিত হইবে। স্বাভাবিক কৌতূহল বশতঃ লীলাবতী উহা দেখিতে থাকেন

হঠাৎ তাঁহারই শিরোভূষণ হইতে একখণ্ড মুক্তা ঐ পাত্রের মধ্যে পড়িয়া ছিদ্রটি রুদ্ধ করিয়া ফেলিল। ইহার ফলে ঐ শুভ লগ্নের সঠিক হিসাব সম্ভব হইল না। ভাস্করাচার্য তাঁহার কন্যার বিধিলিপি খণ্ডন করিতে না পারিয়া সান্ত্বনার জন্য কন্যার নামে গ্রন্থটির নামকরণ করেন।

সম্রাট আকবরের নির্দেশে 'লীলাবতী' গ্রন্থটি ফার্সী ভাষায় অনূদিত হয়।

6. **লীলাবতী**ঃ ইনি ভারতের একজন অসামান্য বুদ্ধিমতী ও বিদুষী রমণী। লীলাবতীর জন্মকাল খ্রীষ্টীয় দ্বাদশ শতক। বিবাহের অব্যবহিত পরেই লীলাবতীর পতিবিয়োগ ঘটিলে ভাস্করাচার্য কন্যাকে স্বগৃহে রাখিয়া অতি যত্নে বিদ্যাশিক্ষা দেন। ভাস্করাচার্যের 'সিদ্ধান্ত শিরোমণি' গ্রন্থের একটি খণ্ড লীলাবতী রচনা করেন। সেইজন্য তাঁহার পিতা ঐ খণ্ডের নাম দিলেন 'লীলাবতী'। ইহাতে বিবৃত পাটীগণিত ও বীজগণিতের সূত্রাবলী অদ্যাবধি লীলাবতীর নামেই প্রসিদ্ধ। "পাটীনাম্ সঙ্কলিত-ব্যবকলিত-গুণন-ভজনাদীনাং ক্রমঃ তেন যুক্তং গণিতং পাটীগণিতম্"—ইহা লীলাবতীর একটি টীকা। ইহা হইতে জানা যায় 'পাটী' শব্দের অর্থ ক্রম বা প্রণালী এবং গণিত শাস্ত্রের যে অংশে যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ প্রণালী আলোচিত হয় তাহাকে পাটীগণিত বলে।

ইহা ব্যতীত পরে তোমরা আরো অনেক প্রখ্যাত হিন্দু গণিতবিদ্‌দের জীবনী পাঠ করিয়া গণিতের বহু বিষয় জানিতে পারিবে।

পাশ্চাত্য দেশের কয়েকজন বিখ্যাত গণিতজ্ঞ

পাশ্চাত্যদেশের কতিপয় প্রখ্যাত গাণিতিকের জীবনী নিম্নে আলোচনা করা হইল। ইঁহাদের উদ্ভাবিত অনেক বিষয়ই তোমরা পাঠ্যপুস্তকে পাঠ করিবে।

1. **থ্যালেস** (Thales)ঃ গ্রীক গণিতজ্ঞদের মধ্যে ইনিই প্রথম বিজ্ঞানভিত্তিক গণিত শাস্ত্রের বিভিন্ন শাখার গবেষণা করেন। তাঁহার জন্ম-সময়, স্থান ইত্যাদির বিষয়ে বিশেষ কিছুই জানা যায় না। প্রথম জীবনে তিনি একজন প্রখ্যাত ব্যবসায়ী, মধ্যকালে একজন রাজনীতিজ্ঞ ও শেষ জীবনে একজন গণিতবিদ্, জ্যোতিবিদ্ ও দার্শনিক হিসাবে জীবন অতিবাহিত করেন। তিনি জ্যোতিবিদ্যায় বিশেষ পারদর্শী ছিলেন। কেহ কেহ বলেন তিনি চন্দ্র ও সূর্যগ্রহণের সঠিক সময় নির্ধারণ করিতে পারিতেন। তাঁহাকে গ্রীস দেশের জ্যামিতি, পাটীগণিত ও জ্যোতিবিদ্যার জনক বলা হয়। তিনি পীথাগোরাসের শিক্ষাগুরু ছিলেন। অনেকের মতে—থ্যালেস ব্যতীত পীথাগোরাসকে পাওয়া সম্ভব ছিল না।

রোমের যাদুঘরে রক্ষিত থ্যালেসের আবক্ষ মূর্তি

2. **পীথাগোরাস** (Pythagoras)ঃ যতদূর জানা যায় বিখ্যাত গ্রীক দার্শনিক পীথাগোরাস গ্রীসীয় উপনিবেশ (Colony) সামোসে (Samos) জন্মগ্রহণ করেন। তাঁহার জীবনকাল আনুমানিক খ্রীষ্টপূর্ব 580—495 অব্দ। তিনি দক্ষিণ ইতালীর এক উপনিবেশে বসতি করেন। অনেকে বলেন তিনি ইতালীর লোক, শৈশবে পিতার সহিত সামোসে আসেন। তাঁহার জন্মকাল, জন্মস্থান, পিতৃ-পরিচয় ইত্যাদি বিষয়ে মতান্তর দেখা যায়। কিন্তু তিনি যে প্রাচীনকালের একজন অন্যতম গণিতজ্ঞ ও সমকালীন সভ্যতার শ্রেষ্ঠ উন্নয়নকারী এ-বিষয়ে কাহারও সন্দেহ নাই।

তাঁহার শিক্ষক থ্যালেসের পরামর্শে তিনি মিশরে যান এবং সেখানে বিশেষ অভিজ্ঞতা লাভ করেন। তিনি মিশরের যাজকদের নিকট পরিমিতি সম্বন্ধে জ্ঞান লাভ করেন। ওখানকার মন্দিরের মেঝেতে যে সকল চিত্রিত মোসাইক পাথর বসান ছিল তাহাতে একটি বর্গক্ষেত্রকে ঘিরিয়া একটি বৃহত্তর বর্গক্ষেত্র আছে দেখিয়া "সমকোণী ত্রিভুজের কর্ণের বর্গ অপর দুই বাহুর বর্গের সমষ্টির সমান" তাঁহার এই প্রসিদ্ধ জ্যামিতিক উপপাদ্য উদ্ভাবন করেন। ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি বিষয়ক প্রতিজ্ঞাও তাঁহার প্রতিষ্ঠিত পীথাগোরীয় সম্প্রদায় প্রমাণ করিয়াছিল। পীথাগোরাস মিশর ও ভারতবর্ষ পরিভ্রমণ করিয়া গণিত ও দর্শন শাস্ত্রের প্রচুর জ্ঞান অর্জন করেন। জ্যামিতির ন্যায় তিনি পাটীগণিতকেও উচ্চ স্থান দিয়াছিলেন। তিনি সঙ্গীতপ্রিয় ছিলেন এবং ইহাতেও তাঁহার অবদান যথেষ্ট। আত্মার দেহ হইতে দেহান্তর ঘটে এই দার্শনিক মতবাদ তিনি পোষণ করিতেন। তিনি কোন লিখিত পুস্তক রাখিয়া যান নাই। তিনি শিষ্যগণকে মুখে মুখে শিক্ষা দিতেন। শোনা যায় কোন ঘাতকের হস্তে তাঁহার মৃত্যু হয়।

পীথাগোরাসের চিত্রাঙ্কিত
সামসীয় মুদ্রা

3. **ইউক্লিড** (Euclid)ঃ আলেকজান্দ্রিয়ার খ্যাতনামা ব্যক্তিগণের মধ্যে ইউক্লিডের নাম সর্বাপেক্ষা প্রসিদ্ধ ছিল। ইনি একজন বিখ্যাত গাণিতিক। ইঁহারও জন্মস্থান, জন্মকাল প্রভৃতি বিষয়ে সঠিক কিছু জানা যায় না। তিনি গ্রীক অথবা মিশরের অধিবাসী ছিলেন তাহার যথার্থ প্রমাণ নাই। অনুমান করা হয় যে তাঁহার জীবনকাল 300 খ্রীষ্টাব্দের নিকটবর্তী কোন এক সময়ে। আলেকজাণ্ডারের মৃত্যুর পর টলেমী (Ptolemy) একটি বিশ্ববিদ্যালয় স্থাপন করিয়া ইউক্লিডকে শিক্ষকরূপে লইয়া যান। প্রখ্যাত শিক্ষক ইউক্লিড গণিত পুস্তক রচনায় বিরাট সাফল্য লাভ করেন। তাঁহার পুস্তকের বহু সংস্করণ হইয়াছে। ইহার প্রধান কীর্তি 'Elements' নামক প্রসিদ্ধ পুস্তক। ইহাতে ব্যবহৃত

যুক্তিসমূহকে জ্যামিতিক যুক্তির একমাত্র ও নির্ভুল সোপান বলিয়া বিবেচিত হয়। এই Elements-এ তেরোখানি পুস্তকের সন্নিবেশ আছে। প্রথম হইতে ষষ্ঠ পুস্তকের মধ্যে রেখা, ক্ষেত্রফল, বৃত্ত, সামতলিক ক্ষেত্র সম্বন্ধীয় আলোচনা আছে। সপ্তম হইতে নবম পর্যন্ত পুস্তকে সংখ্যাতত্ত্ব, গ.সা.গু. ও ল.সা.গু. নির্ণয়, গুণোত্তর শ্রেণী ও সূচক পদ্ধতি সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে। দশম পুস্তকে a ও b-কে ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা ধরিয়া $(a^{\frac{1}{2}} \pm b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$ শ্রেণীর অমূলদ সংখ্যা এবং একাদশ খণ্ডে ঘনজ্যামিতি আলোচিত হইয়াছে। ইহার জ্যোতির্বিদ্যা, সঙ্গীত, দৃষ্টি সম্বন্ধীয় আলোক বিজ্ঞান প্রভৃতি বিষয়েও পুস্তক আছে।

4. কোপার্নিকাস (Copernicus): পোল্যাণ্ডের থর্নে 1473 খ্রীষ্টাব্দে 19শে ফেব্রুয়ারী বিখ্যাত জ্যোতির্বিদ ও গণিতজ্ঞ নিকোলাস কোপার্নিকাস জন্মগ্রহণ করেন। তিনি ক্রাকাউ (Cracow) বিশ্ববিদ্যালয়ে পড়াশুনা করেন। আইন, চিকিৎসাবিদ্যা ও জ্যোতিবিদ্যা সম্বন্ধে পড়াশুনা করেন Padua এবং Eologna বিশ্ববিদ্যালয়ে। তিনি রোমের পোপ ষষ্ঠ আলেকজাণ্ডারের অনুপ্রেরণায় জ্যোতিবিদ্যা গবেষণা করেন। 1530 খ্রীষ্টাব্দের মধ্যেই বিশ্বব্রহ্মাণ্ড সম্বন্ধীয় তাঁহার যে যুগান্তকারী বিখ্যাত তত্ত্ব তাহার কাজ শেষ হয়। কিন্তু ইহা 1543 খ্রীষ্টাব্দে যখন প্রকাশিত হয় তখন তিনি সন্ন্যাসরোগে পঙ্গু হইয়া শয্যাশায়ী। পাশ্চাত্য জগতে ইনিই প্রথম প্রকাশ করেন যে, সূর্য সৌরজগতের কেন্দ্র এবং পৃথিবী ও অন্যান্য গ্রহ সূর্যের চারিদিকে ঘুরিতেছে। বলা হয়—কলম্বাস একটি নূতন জগৎ আবিষ্কার করেন কিন্তু কোপার্নিকাস কোটি কোটি জগৎ আবিষ্কার করেন। 1543 খ্রীষ্টাব্দে 24শে মে ফ্রুয়েনবার্গে তাঁহার মৃত্যু হয়।

প্রাচীন খোদাই হইতে গৃহীত

5. যোহান কেপলার (Johun Kepler): কেপলার 1571 খ্রীষ্টাব্দে জার্মানীর স্টুটগার্টে জন্মগ্রহণ করেন। যদিও তিনি একজন জ্যোতির্বিদ্ হিসাবে প্রখ্যাত কিন্তু গণিতজ্ঞ হিসাবেও উচ্চস্থান অধিকার করেন। জ্যামিতি, বীজগণিত, ক্যালকুলাস, লগারিদম্ প্রভৃতির উপর তাঁহার গবেষণা ও অবদান সুবিদিত।

তাঁহার পারিবারিক জীবন মোটেই শান্তিপূর্ণ ছিল না ও সংসারে আর্থিক অনটন ছিল। 1630 খ্রীষ্টাব্দে 14ই নভেম্বর রিজেন্সবার্গে তাঁহার মৃত্যু হয়।

6. **নিউটন (Isaac Newton)ঃ** লিন্‌কন্‌সায়ারের উলস্‌থোপে এক কৃষক পরিবারে ক্ষণজন্মা পুরুষ নিউটন 1642 খ্রীষ্টাব্দে 25শে ডিসেম্বর জন্মগ্রহণ করেন।

(i) পদকে নিউটনের ছবি

(ii) নিউটনের স্বাক্ষর

এই প্রখ্যাত ব্রিটিশ বিজ্ঞানী ও গণিতবিদের পরিচয় ও অনেক গল্প তোমরা পূর্বেই হয়তো জানিয়া থাকিবে। তিনি নিজেই বলিয়াছেন যে, প্রথম ছাত্র-জীবনে তিনি খুবই অমনোযোগী ছিলেন ও পরীক্ষায় খুব খারাপ ফল করিতেন। তিনিই পরে পৃথিবীর শ্রেষ্ঠ বিজ্ঞানীদের মধ্যে অন্যতম বলিয়া পরিগণিত হন। তাঁহার 'মাধ্যাকর্ষণ শক্তির' আবিষ্কারের কথা ও 'আলোকের গতিনির্ণয়' বিষয়ে তোমরা পূর্বেই জানিয়াছ।

তিনি সারা জীবন বিজ্ঞান ও গণিতশাস্ত্রের চর্চা করেন এবং বহু বিষয় আবিষ্কার করিয়া জগতে অমরত্ব লাভ করেন। তিনি দেশের বহু গৌরবজনক পদের অধিকারী হন। ইংলণ্ডের রাণী 'এ্যানে' (Anne) তাঁহাকে **নাইট** পদবী দিয়া সম্মানিত করেন।

বীজগণিত ও সমীকরণের উপর তত্ত্ব 1707 খ্রীষ্টাব্দে "Arithmeticia Universals" নামক পুস্তকে প্রকাশিত হয়। ইহা তাঁহার বিভিন্ন বক্তৃতার সঙ্কলন। মাধ্যাকর্ষণ শক্তি সম্বন্ধে তাঁহার গবেষণা বিখ্যাত পুস্তক **'প্রিনসিপিয়াতে'** বর্ণিত হইয়াছে।

1727 খ্রীষ্টাব্দে 20শে মার্চ, চুরাশি বৎসর বয়সে কেন্‌সিঙ্গটনে তাঁহার মৃত্যু হয়। ওয়েস্টমিন্‌স্টার এ্যাবেতে তাঁহার সমাধি সৌধ আজও বিদ্যমান।